OPTIMALNO UPRAVLJANJE

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet u Podgorici
Univerzitet Crne Gore

Tema 1

Modelovanje i analiza kontinualnih i diskretnih sistema u prostoru stanja

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- Riješe jednačine stanja kontinualnog i diskretnog LTI sistema
- Diskretizuju kontinualni sistem
- Ispitaju kontrolabilnost, opservabilnost, stabilizabilnost i detektabilnost sistema
- Linearnim transformacijama preslikaju sistem u neku od kanoničnih formi
- Linearizuju nelinearni model sistema u prostoru stanja
- Ispitaju lokalnu stabilnost ekvilibrijuma sistema

Kontinualni sistemi u prostoru stanja

U prostoru stanja dinamika kontinualnih sistema se modeluje na sljedeći način:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t).$$

Za promjenljive stanja treba usvojiti minimalan skup linearno nezavisnih promjenljivih, pri čemu one ne moraju da imaju fizički smisao.

Specijalno za linearne vemenski invarijante (LTI) sisteme važi:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

Linearnost podrazumijeva da se izvod svake jednačine stanja može predstaviti kao linearna kombinacija promjenljivih stanja i ulaznih signala, dok vremenska invarijanost znači da su ti koeficijenti konstantni. Odnosno, kod LTI sistema $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ predstavljaju matrice konstantnih koeficijenata.

Kontinualni sistemi u prostoru stanja

Da bi riješili jednačine stanja, za početak posmatrajmo homogenu diferencijalnu jednačinu, odnosno slučaj kada je $\mathbf{u}(t)=0$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Rješenje prethodne vektorske jednačine je:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0.$$

Matricu $\mathbf{\Phi}(t)$ zovemo fundamentalna matrica i ona je jednaka:

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} \triangleq \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \cdots.$$

Naziv matrična ekponencijalna funkcija potiče zbog analogije sa skalarnom eksponencijalnom funkcijom:

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \frac{1}{3!}a^3t^3 + \cdots.$$

Fundamentalna matrica se može definisati i u Laplasovom domenu. Prebacivanjem homogene diferencijalne jednačine u s-domen dobija se:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) \rightarrow \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 \rightarrow \boxed{\mathbf{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left((s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right).}$$

Kontinualni sistemi u prostoru stanja

Do analitičkog izraza za promjenljive stanja pobuđenog sistema se takođe može doći posmatranjem jednačine stanja u s-domenu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \rightarrow s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s).$$

Iz prethodne jednačine se može izraziti vektor $\mathbf{X}(s)$:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + \underbrace{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\,\mathbf{U}(s)}. \quad \longleftarrow \text{Konvolucija}$$

Izraz za $\mathbf{x}(t)$ se dobija primjenom inverzne Laplasove transformacije na prethodnu jednačinu:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau.}$$

Ako su početna stanja zadata u trenutku t_1, tada će promjenljive stanja biti jednake (vremenska invarijantnost):

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(t_1) + \int_{t_1}^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau.}$$

Nakon rješavanja jednačina stanja računa se izlazni signal:

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).}$$

Funkcija prenosa kontinualnog sistema

Da bi odredili vezu između prostora stanja i funkcije prenosa, jednačine stanja i izlaza iz vremenskog domena treba prebaciti u Laplasov domen:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

$$s\mathbf{X}(s) - \cancelto{0}{\mathbf{x}(0^-)} = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$
$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

$$\longrightarrow$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$
$$\mathbf{Y}(s) = \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}(s)$$

Konačno, veza između funkcije prenosa matrica **A**, **B**, **C** i **D**.

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C}\frac{adj(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Posmatrajući prethodni izraz, može se zaključiti da je karakteristični polinom sistema jednak:

$$\boxed{f(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}).}$$

Primjer – rješjevanje jednačina stanja

Odrediti odziv zadatog sistema na step pobudu. Početni uslovi su $\mathbf{x}(0)=[1 \;\; 0]^T$.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), u(t) = h(t), \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Prvo ćemo odrediti fundamentalnu matricu:

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-3t} \\ 0 & \mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Odziv sistema je:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-3t}.$$

```
A=[-2 1;0 -3];B=[0;1];C=[0 1];
x0=[2;1];
syms t tau
Fi=expm(A*t); Fi1=subs(Fi,t-tau)
x=Fi*x0+int(Fi1*B*1,tau,0,t)
y=C*x
```

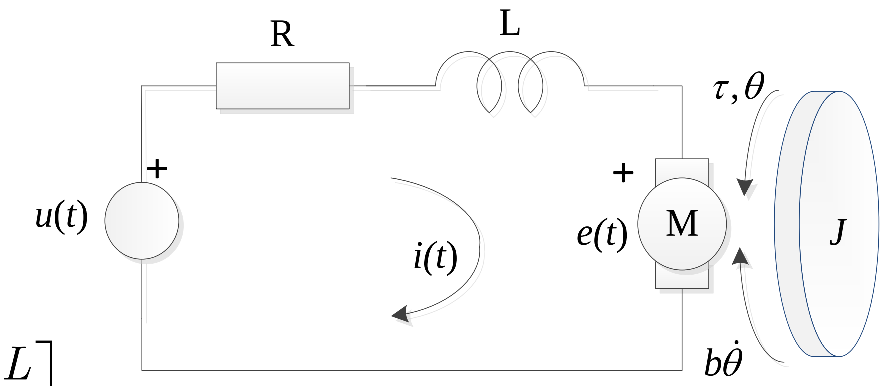
Primjer – model DC motora

Parametri DC motora su $R = 9.5\ \Omega$, $L = 0.008$ H, $J = 2\times10^{-5}$ kgm^2; $b = 0.001$ Nm/s, $k = 0.04$ Nm/A. Odrediti model sistema u prostoru stanja. U Simulinku simulirati step odziv sistema. Analitičkim putem odrediti vrijednost ugaone brzine u stacionarnom stanju, a zatim uporediti dobijeno rješenje sa rezultatima simulacija. Odrediti funkciju prenosa sistema i skicirati strukturni blok dijagram.

$$J\dot{\omega} + b\omega = ki$$

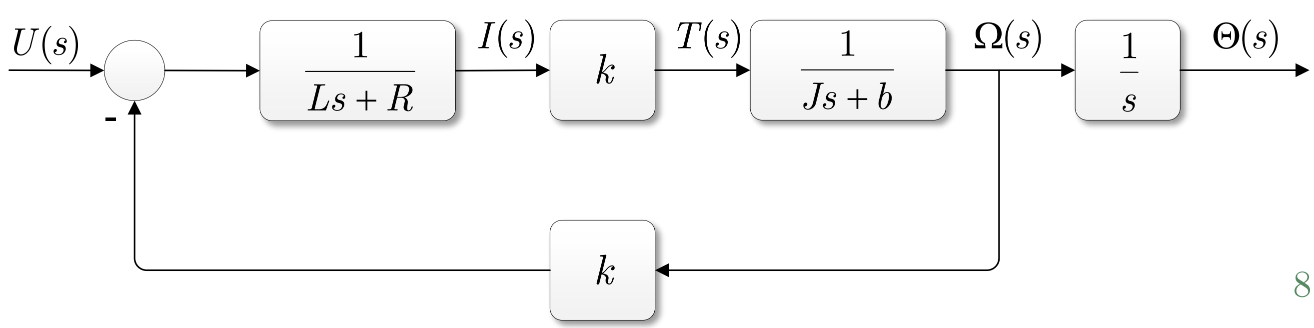
$$L\frac{di}{dt} + Ri = u - k\dot{\omega}$$

$$\omega = \dot{\theta}.$$



$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -k/L & 0 \\ k/J & -b/J & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}.$$



Diskretni sistemi u prostoru stanja

Model diskretnog sistema u prostoru stanja ima sličan oblik kao kod kontinualnih sistema. Razlika je u tome što se radi o skupu diferencnih, a ne diferencijalnih jednačina, koje su u opštem slučaju takođe nelinearne:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n), \mathbf{u}(n), n), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(n), \mathbf{u}(n), n).$$

$n \triangleq nT$

$n - \mathit{redni}$ broj odbirka

T - perioda odabiranja

Za diskretne LTI sisteme važi:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\mathbf{u}(n),$$

gdje su $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ matrice konstantnih koeficijenata. Za početak, zanima nas kako analitičkim putem da odredimo vremenske oblike promjenljivih stanja $\mathbf{x}(n)$ i izlaza sistema $\mathbf{y}(n)$, za zadate početne uslove $\mathbf{x}_0$ i pobudu sistema $\mathbf{u}(n)$.

Diskretni sistemi u prostoru stanja

Najprije posmatrajmo homogenu diferencnu jednačinu, odnosno slučaj kada je ulazni signal jednak nuli:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Gornju jednačinu možemo riješiti rekurzivno, za trenutke n=1, 2, ... , :

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0$$

$$\dots$$

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n-1) = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0.$$

Analogno kontinualnim sistemima, matricu $\mathbf{A}^n$ zovemo fundamentalnom matricom:

$$\mathbf{\Phi}(n) = \mathbf{A}^n.$$

Da su početni uslovi bili zadati u trenutku n_1, tada bi odziv bio jednak:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{\Phi}(n-n_1)\mathbf{x}(n_1) = \mathbf{A}^{n-n_1}\mathbf{x}(n_1).$$

Diskretni sistemi u prostoru stanja

Sada posmatrajmo diskretne jednačine stanja, uz pretpostavku da je ulazni signal $u(n)$ definisan za svako $n>0$:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n).$$

I ove jednačine se mogu riješiti rekurzivno:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0) \\
\mathbf{x}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) \\
&= \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) \\
\mathbf{x}(3) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) \\
&= \mathbf{A}^3\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) \\
&\dots \\
\mathbf{x}(n) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(n-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n-1) \\
&= \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \cdots \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(n-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n) \\
&= \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 + \sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-m-1}\mathbf{B}u(m).
\end{aligned}$$

Funkcija diskretnog prenosa

Za diskretne sisteme funkcija diksretnog prenosa se definiše na isti način kao kod kontinualnih sistema – odnos izlaznog i ulaznog signala. Osnovna razlika je u tome što se diferencijalne jednačine primjenom osobina Laplasove transformacije preslikavaju u s-domen, dok se diferencne jednačine preslikavaju u z-domen. Koristeći osobine Z-transfomacije, sistem diferencnih jednačina se lako prebaca u z-domen:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n) \Leftrightarrow z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z)$$

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\mathbf{u}(n) \Leftrightarrow \mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z).$$

Iz prve jednačine, uz pretpostavku nultih početnih uslova, slijedi:

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(z).$$

Uvrštavanjem izraza $\mathbf{X}(z)$ u izraz za jednačine izlaza, dobija se:

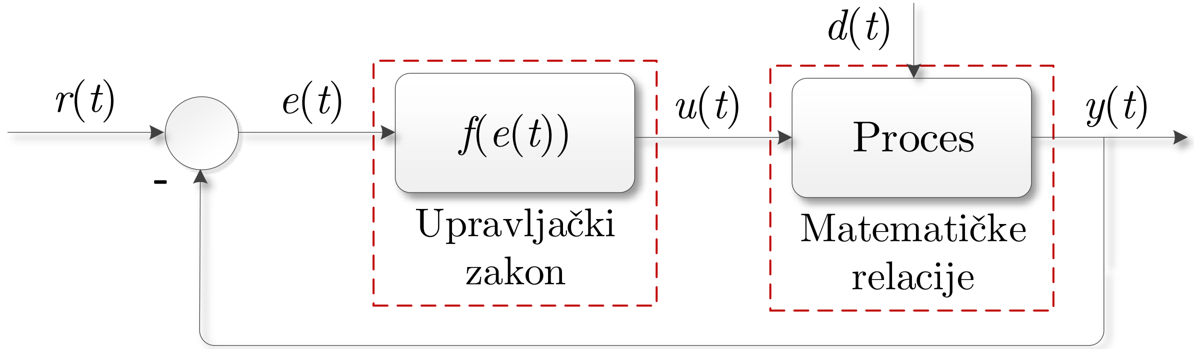
$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z).$$

Konačno, funkcija diskrenog prenosa je jednaka:

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} f(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ \text{karakteristični polinom} \end{array}}$$

Upravljanje sistemima

Upravljati sistemom znači dovoditi na njegov ulaz upravljački signal $u(t)$ takav da se minimizuje razlika između izlazne i referentne (željene) vrijednosti, uprkos uticaju poremećaja koji djeluju na sistem. Iz tog razloga, upravljački signal je najčešće u funkciji od signala greške, odnosno razlike između referentne i izlazne vrijednosti: $u(t)=f(e(t))$.

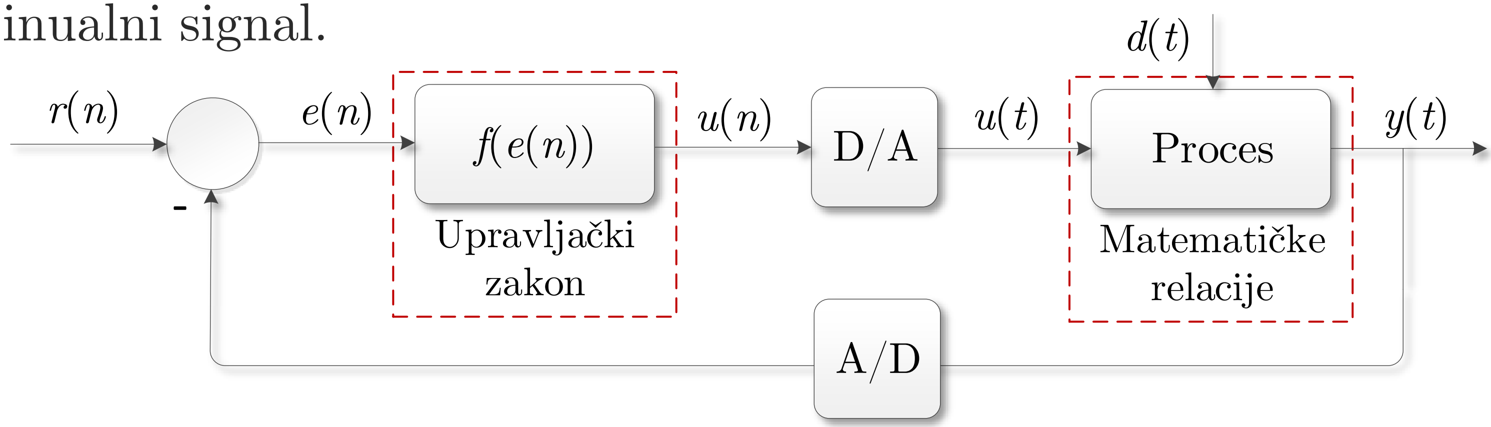


Proces (sistem) kojim upravljamo je najčešće kontinualan, dok upravljački zakon može biti implementiran u analognoj ili digitalnoj tehnici. Zbog ograničenja implementacije, zakoni upravljanja u kontinulanom domenu su linearni (linearne diferencijalne jednačine).

Upravljanje sistemima

Postoji više metoda za dizajn kontinualnih regulatora (upravljačkih zakona). Kod klasičnih metoda sinteza regulatora se vrši u frekvencijskom (Bode) ili kompleksnom domenu (geometrijsko mjesto korijena). U ovom kursu ćemo se baviti sintezom linearnih zakona upravljanja u vremenskom domenu, koji su u funkciji od signala greške i promjenljivih stanja: $u(t)=f(e(t), \mathbf{x}(t))$.

Digitalni zakoni upravljanja se implementiraju na računaru u vidu linearnih diferencnih jednačina. Kako je proces kojim se upravlja kontinualan, potrebno je izvršiti A/D konverziju izmjerenog signala. Nakon toga signal greške se obrađuje na računaru. Računar generiše diskretni uravljački signal koji se pomoću D/A konvertora pretvara u kontinualni signal.



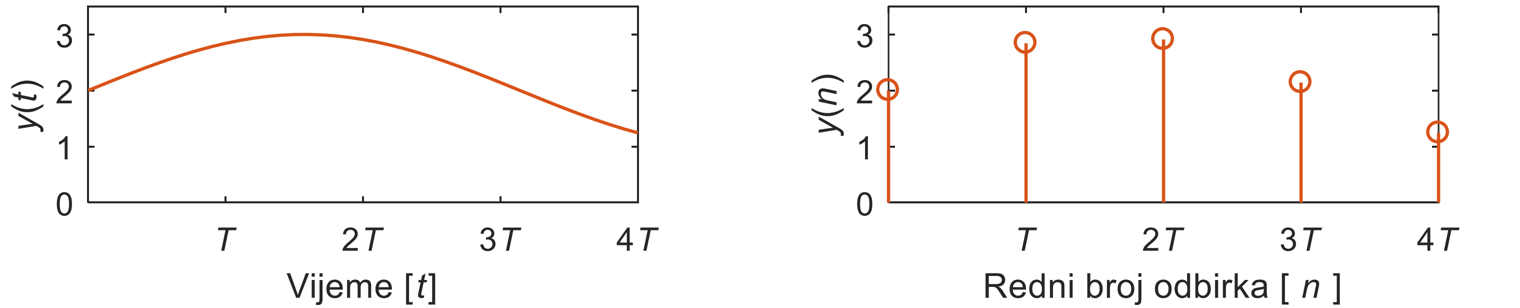
Upravljanje sistemima

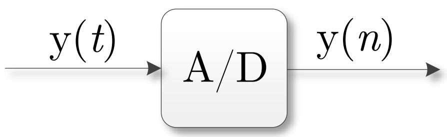
Postoji nekoliko metoda za dizajn digitalnih regulatora:

- Diskretizacija analognih regulatora: kod ovog metoda dizajn regulatora se vrši u kontinualnom domenu primjenom klasične teorije. Nakon toga dobijeni analogni regulator se diskretizuje i implementira u obliku digitalnog filtra koristeći neki od diskretizacionih postupaka (Tustin, Euler, Zero-Pole Matching, itd.)
- Dizajn u w-ravni: kod ove metode najprije se određuje funkcija diskretnog prenosa procesa $W(z)$, koja se nakon toga preslikava u takozvanu w-ravan. Karakteristike w-ravni su slične karakterstikama s-ravni, pa se za dizajn regulatora mogu koristiti frekvencijske metode. Na kraju, dobijeni regulator se inverznom transformacijom preslikava nazad u z-ravan i implementira na računaru.
- Direktni dizajn u diskretnom domenu: kod ovog postupka sinteza regulatora se vrši direktno u diskretnom vremenskom domenu na osnovu diskretizovanog state-space modela sistema, zatvaranjem sprege po varijablama stanja ($u(n)=f(e(n), \mathbf{x}(n))$).

Odabiranje analognih signala (A/D)

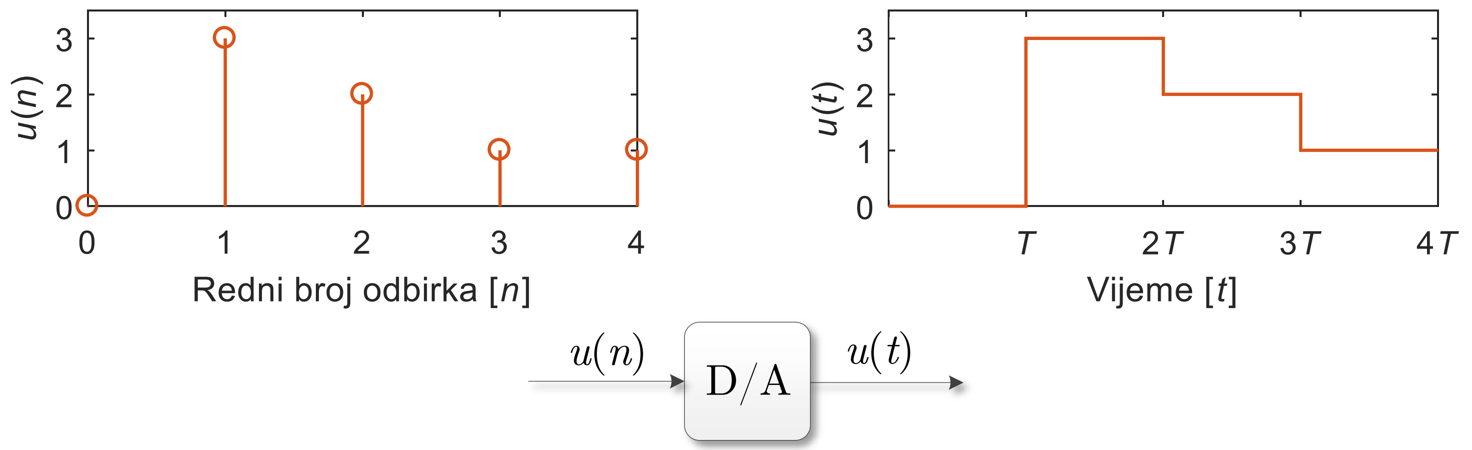
Kako računar razumije samo brojeve, mjereni signal prvo treba diskretizovati, odnosno treba uzeti (odabrati) njegove vrijednosti u ekvidistantnim trenucima vremena i proslijediti ih računaru. Što je perioda odabiranja manja, to će diskretna reprezentacija signala sadržati više informacija o kontinualnom signalu. Štaviše, teorema o odabiranju garantuje mogućnost potpune rekonstrukcije analognog signala iz diskretnih odbiraka ukoliko je frekvencija odabiranja odabrana tako da je bar dva puta veća od najveće učestanosti u frekvencijskom spektru signala. U praksi signali nemaju ograničen spektar, ali se često može smatrati da je spektar signala zanemarljiv nakon neke učestanosti f_m.





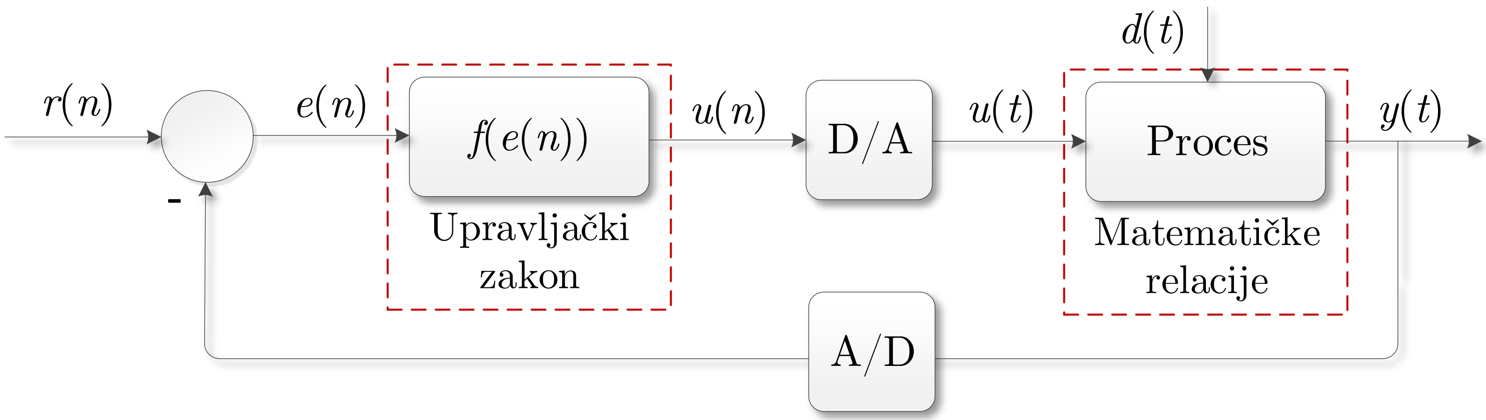
Rekonstrukcija analognog signala (D/A)

Proces konverzije digitalnog u analogni signal se zove rekonstrukcija, dok se uređaj koji vrši rekonstrukciju naziva D/A konvertor. Ukoliko je zadovoljena teorema o odabiranju, kontinualni signal se može potpuno rekonstruisati propuštanjem njegovih diskretnih odbiraka kroz idealni niskopropusni filtar. Međutim, idealni niskopropusni filtar se ne može implementirati u realnom vremenu. U praksi se za rekonstrukciju analognih signala najčešće koristi kolo zadrške nultog reda (zero-order-hold, ZOH). ZOH kolo uzima diskretni odbirak signala $u(nT)$ i drži ga konstantnim u vremenskom intervalu $nT<t<(n+1)T$, sve dok ne naiđe sljedeći odbirak signala.

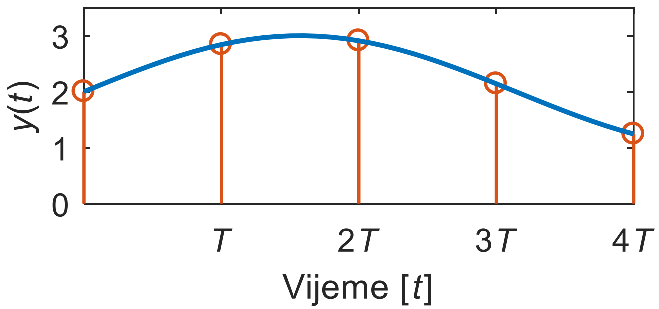


Diskretizacija state-space modela

Prilikom dizajna digitalnog regulatora potrebno je diskretizovati kontinualni model procesa, pritom uzimajući u obzir da je signal $u(t)$ stepenastog oblika, odnosno da se za D/A konverziju koristi ZOH kolo.



Važno je napomenuti da će se na ovaj način dobiti diskretni model koji egzaktno opisuje odziv kontunualnog procesa (sa ZOH-om) u trenucima odabiranja nT.



Diskretizacija state-space modela

Posmatrajmo jednačine stanja kontinualnog LTI sistema, odnosno njihovo rješenje:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t - t_0)\mathbf{x}_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau, \mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}.$$

Neka je $t_0 = nT$ i $t = (n+1)T$, gdje je T perioda odabiranja. Na osnovu prethodne jednačine može se zapisati sljedeće:

$$\mathbf{x}(nT+T) = \mathbf{\Phi}(nT+T-nT)\mathbf{x}(nT) + \int_{nT}^{nT+T} \mathbf{\Phi}(nT+T-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau, \mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}.$$

S obzirom je signal $u(t)$ konstantan između dva uzastopna trenutka odabiranja, gornji izraz se svodi na:

$$\mathbf{x}(nT+T) = \mathbf{\Phi}(T)\mathbf{x}(nT) + \left[\int_{nT}^{nT+T} \mathbf{\Phi}(nT+T-\tau)\mathbf{B}\,d\tau\right]\mathbf{u}(nT), \mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}.$$

$$\mathbf{x}(n+1) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(n) + \left[\int_{nT}^{nT+T} e^{\mathbf{A}(nT+T-\tau)}\mathbf{B}\,d\tau\right]\mathbf{u}(n).$$

Diskretizacija state-space modela

Posmatrajući diferencne jednačine:

$$\mathbf{x}(n+1) = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(n) + \left[\int_{nT}^{nT+T} e^{\mathbf{A}(nT+T-\tau)}\mathbf{B}\,d\tau\right]\mathbf{u}(n).$$

i imajući u vidu state-space model diskretnog sistema, dobija se diskretizovani model kontinualnog state-space modela:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}_d\mathbf{u}(n),$$

gdje su matrice $\mathbf{A}_d$ i $\mathbf{B}_d$ jednake:

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T}, \mathbf{B}_d = \int_{nT}^{nT+T} e^{\mathbf{A}(nT+T-\tau)}\mathbf{B}\,d\tau.$$

Uvodeći smjenu $\gamma = nT + T\text{-}\tau$, izraz za $\mathbf{B}_d$ se može pojednostaviti:

$$\mathbf{B}_d = -\int_{T}^{0} e^{\mathbf{A}\gamma}\mathbf{B}\,d\gamma = \int_{0}^{T} e^{\mathbf{A}\gamma}\mathbf{B}\,d\gamma.$$

Diskretizacija state-space modela

Posmatrajmo sada linearne izlazne jednačine kontinualnog sistema:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

U trenutku $t{=}nT$ izlazi su jednaki:

$$\mathbf{y}(nT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(nT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(nT),$$

odakle slijedi da je:

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{C}, \mathbf{D}_d = \mathbf{D}.$$

Na kraju sumirajmo prethodno rečeno. Ponašanje kontinualnog sistema opisanog u prostoru stanja matricama ($\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$,$\mathbf{D}$) na čiji ulaz dolazi stepenasti signal periode T (izlaz iz ZOH-a) u trenucima $t{=}n$T se može egzaktno opisati diskretnim modelom ($\mathbf{A}_d$,$\mathbf{B}_d$,$\mathbf{C}_d$,$\mathbf{D}_d$), pri čemu važi:

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T}, \mathbf{B}_d = \int_0^T e^{\mathbf{A}\gamma}\mathbf{B}\,d\gamma$$

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{C}, \mathbf{D}_d = \mathbf{D}.$$

ZOH preslikavanje

Nakon diskretizacije kontinualnog procesa, vrši se dizajn regulatora u domenu diskretnog vremena. Prilikom dizajna sistema obično se specificira željena vrijednost polova spregnutog sistema. Međutim, iako se dizajn vrši u diskretnom domenu, odziv SAU-a je kontinualan. Stoga prirodno je da se željene lokacije polova zadaju u kontinualnom domenu, ali ih nakon toga treba preslikati u z-domen. Veza između polova kontinualnog sistema i polova odgovarajućeg ZOH (diskretizovanog) ekvivalenta je data sljedećom relacijom:

$$z_i = e^{s_i T},$$

gdje su s_i polovi kontinualnog sistema, T je perioda odabiranja, dok z_i označava polove ZOH ekvivalenta.

Primjer - diskretizacija

Dinamika DC motora je opisana modelom u prostoru stanja:

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -k/L & 0 \\ k/J & -b/J & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix},$$

pri čemu je $R = 9.5\ \Omega$, $L = 0.008$ H, $J = 2\times10^{-3}$ kgm^2; $b = 0.001$ Nm/s, $k = 0.04$ Nm/A. Ako je perioda odabiranja jednaka $T = 0.1$s, odrediti diskretizovani model sistema u prostoru stanja. U Simulinku simulirati odziv kontinualnog i diskretnog modela. Takođe, napisati m-file kojim se analitički i numerički računa odziv diksretizovanog modela. Na jednom grafiku prikazati i uporediti odzive iz Simulinka i m-fajla. Razmotriti dva ulazna signala: $h(t)$ i $\sin(10t)$.

Nakon uvrštavanja konkretnih vrijednosti u polazni model dobija se:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -118.75 & -0.625 & 0 \\ 25 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 12.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primjer - diskretizacija

Za periodu odabiranja T=0.1s, nakon primjene formula za diskretizaciju dobijaju se sljedeće matrice:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} -0.0010454 & -0.0049727 & 0 \\ 0.19891 & 0.93978 & 0 \\ 0.018747 & 0.097003 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0.10414 \\ 0.23433 \\ 0.01092 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Funkcija prenosa motora je:

$$G = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{1250}{4s^2 + 477s + 300},$$

dok je funkcija prenosa diksretizovanog modela:

$$G_d = \mathbf{C}_d(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1}\mathbf{B}_d = \frac{0.23433z^2 - 0.21338z - 0.020959}{z^3 - 1.9387z^2 + 0.93874z - 6.6227e - 06}.$$

Statička pojačanja kontinualnog i diskretnog modela su:

$$K = \lim_{s \to 0} G(s) = 4.16 \quad \text{i} \quad K_d = \lim_{z \to 1} G(z) = 4.16.$$

Primjer - diskretizacija

```
% Odziv disketnog sistema za zadate matrice Ad,Bd,Cd
close all
syms z
% odrediti promjenljive stanja x(n), ako na je ulaz step f-ja u(n)
Fi=(z*eye(3)-Ad)^-1;
X=Fi*Bd*1/(1-z^-1);  %z-transformacije heaviside-ove f-je,
ztrans(heaviside(t))
x=simplify(iztrans(X))
y=vpa(Cd*x,5);
n=0:100; % 10 sekundi (n*T)
yy=subs(y,n)
stairs(n*T,yy)
xlabel('Vrijeme')
% Simulacija sistema
clear y
x=[0;0;0]; % pocetni uslovi
for n=1:100
    x=Ad*x+Bd*1;
    y(n)=C*x; % koristimo n ako zelimo da cuvamo rezultat. U suprotnom treba
stedjeti memoriju
end
hold on
stem([1:100]*T,y,'--r')
```

Simulacioni blok dijagrami

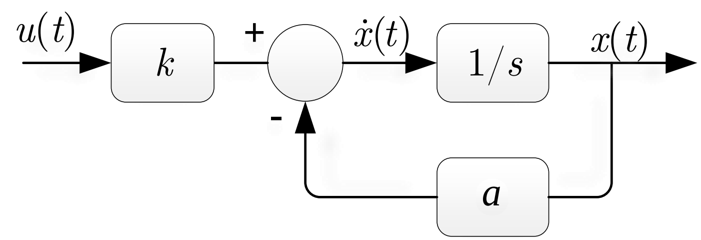
Simulacioni blok dijagrami

Posmatrajmo funkcije prenosa prvog reda kontinualnog i diskretnog sistema:

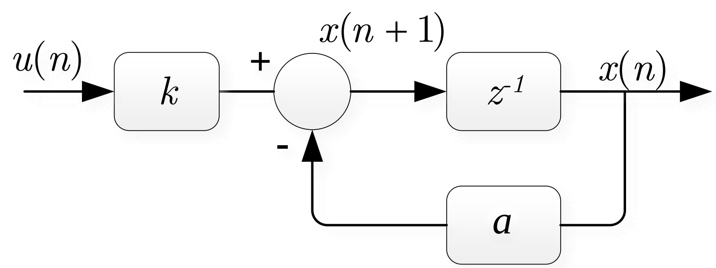
$$G(s) = \frac{k}{s+a} \text{ i } G(z) = \frac{k}{z+a}.$$

Kvazi-analogni blok dijagram ili simulacioni dijagram sistema je dijagram koji se sastoji od elementarnih komponenti: integratora/kola za kašnjenje, sabirača i pojačavača. Konkretno za dati primjer, on se može nacrtati na osnovu diferencijalne/diferencne jednačine:

$$G(s) = \frac{k}{s+a} \Rightarrow \dot{x}(t) = -ax(t) + ku(t)$$



$$G(z) = \frac{k}{z+a} \Rightarrow x(n+1) = -ax(n) + ku(n)$$

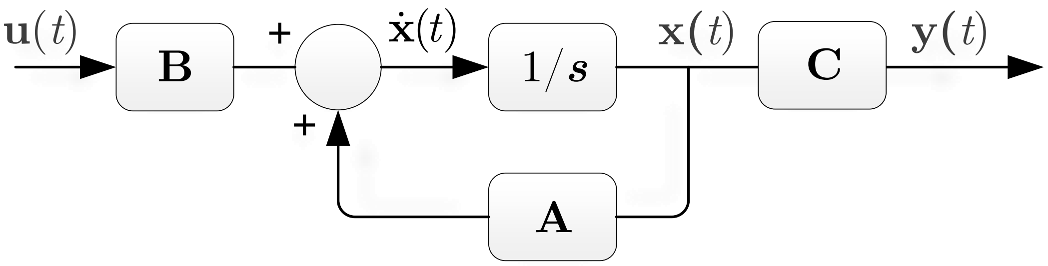


Simulacioni blok dijagrami

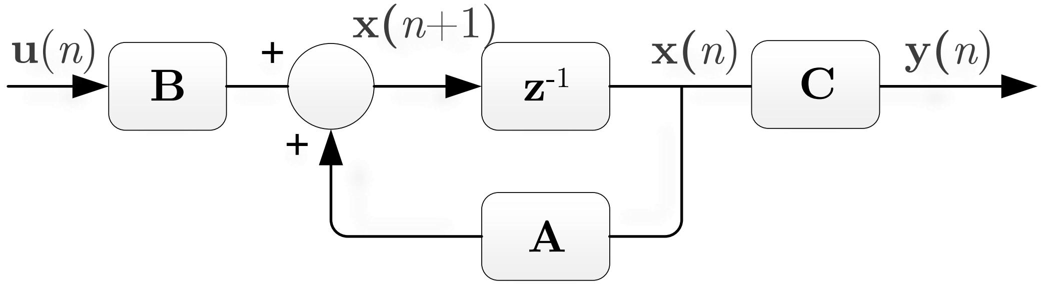
Kvazi-analogni blok dijagram sistema većeg reda se crta na sličan način. Umjesto jednog integratora uvodi se n integratora, pri čemu ulaz u svaki integrator predstavlja jednu promjenljivu stanja. Nakon toga na ulaze sabirača se povezuju stanja i ulazni signali u skladu sa jednačinama sistema.

Često se radi jednostavnosti crta vektorski simulacioni blok dijagram.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$



$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}x(n) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n)$$
$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n)$$



Kontrolabilnost i opservabilnost sistema

Kontrolabilnost kontinualnih sistema

Posmatrajmo LTI sistem opisan u prostoru stanja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

Definicija

Za LTI sistem kažemo da je potpuno kontrolabilan (upravljiv) ako postoji upravljački signal $\boldsymbol{u}(t)$ takav da pomjeri sistem iz bilo kog početnog stanja $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ u željeno stanje $\boldsymbol{x}(t_1)=\boldsymbol{x}_1$, za neko konačno vrijeme t_1-t_0.

Drugim riječima treba da postoji $\mathbf{u}(t)$ takav da važi:

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = \mathbf{x}_1.$$

Posmatrajući izraz iznad, uočava se da kontrolabilnost zavisi samo od matrica **A** i **B**. Naš zadatak je da ispitamo koji uslov treba da zadovolje matrice **A** i **B**, tako da gornja jednačina uvijek bude zadovoljena.

Kontrolabilnost kontinualnih sistema

Za izvođenje uslova kontrolabilnosti koristićemo Cayley-Hamiltonovu teoremu, na osnovu koje se može tvrditi da se prozivoljna matrična funkcija može zapisati kao linearna kombinacija njenih eksponentata do (n-1)-og stepena:

$$e^{-\mathbf{A}\tau} = \alpha_0(\tau)\mathbf{I} + \alpha_1(\tau)\mathbf{A} + \ldots + \alpha_{n-1}(\tau)\mathbf{A}^{n-1}.$$

Uvrštavanjem gornjeg izraza u izraz za jednačine stanja $\mathbf{x}(t)$, dobija se

$$e^{-At}\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \int_0^{t_1}\left[\alpha_0(\tau)\mathbf{I} + \alpha_1(\tau)\mathbf{A} + \ldots + \alpha_{n-1}(\tau)\mathbf{A}^{n-1}\right]\mathbf{Bu}(\tau)d\tau.$$

Posljednja jednakost se može zapisati u matričnom obliku:

$$e^{-At}\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right]\begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \ldots \\ r_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$r_0 = \int_0^{t_1}\alpha_0(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

$$r_1 = \int_0^{t_1}\alpha_1(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

$$r_{n-1} = \int_0^{t_1}\alpha_{n-1}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Kontrolabilnost kontinualnih sistema

Da bi sistem preveli iz stanja $\mathbf{x}_0$ u stanje $\mathbf{x}_1$, potrebno je riješiti prethodni sistem jednačina. Odnosno, prvo treba naći vektor $\mathbf{r}$, a zatim poznavajući r_1, r_2,.. r_2 odrediti upravljanje (upravljački signal) $\mathbf{u}(t)$.

$$e^{-At}\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right] \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \ldots \\ r_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_c\mathbf{r}.$$

Međutim, u ovom kursu nas ne interesuje pronalaženje upravljanja $\mathbf{u}(t)$ koje prevodi sistem iz nekog početnog u željeno stanje, već nas samo zanima pod kojim uslovima to upravljanje postoji.

$$e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \mathbf{M}_c\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{M}_c^{-1}\left[e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\right]$$

Prethodna jednačina ima jedinstveno rješenje jedino pod uslovom da je matrica $\mathbf{M}_c$ invertibilna.

Kontrolabilnost kontinualnih sistema

Drugim riječima, sistem je potpuno kontrolabilan ako važi sljedeće:

$$rank(\mathbf{M}_c) = \text{rank}\left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right] = n,$$

$$\det(\mathbf{M}_c) \neq 0.$$

Ako je $rank(\mathbf{M}_c) = n - p$, onda da sistem ima n-p kontrolabilnih stanja. Preostalih p stanja nije kontrolabilno, što znači da na njih ne možemo direktno ili indirektno da utičemo ulaznim signalom ili su ona linearna kombinacija preostalih n-p kontrolabinih stanja. U drugom slučaju sistem je premodelovan, odnosno usvojen je veći broj promjenljivih stanja nego što je potrebno.

Ukoliko sistem nije potpuno kontrolabilan, tada se nekontrolabilne promjenljive stanja mogu identifikovati na osnovu simulacionog blok dijagrama. Dakle, potrebno je nacrtati simulacioni blok dijagram i uočiti da li ulaz direktno ili indirektno utične na promjenljive stanja.

Kontrolabilnost diskretnih sistema

Posmatrajmo diskretni LTI sistem opisan u prostoru stanja:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\mathbf{u}(n).$$

Definicija

Za diskretni LTI sistem kažemo da je potpuno kontrolabilan (upravljiv) ako postoji upravljački signal $\boldsymbol{u}(n)$ takav da pomjeri sistem iz bilo kog početnog stanja $\boldsymbol{x}(n_0)=\boldsymbol{x}_0$ u željeno stanje $\boldsymbol{x}(n_1)=\boldsymbol{x}_1$ za neko konačno vrijeme n_1-n_0.

Može se pokazati da je diskretni sistem potpuno kontrolabilan ukoliko je zadovoljen sljedeći uslov:

$$rank(\mathbf{M}_c) = \mathrm{rank}\left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right] = n \quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{M}_c) \neq 0.$$

Dakle, kontrolabilnost kontinualnih i diskretnih sistema se definiše i ispituje na isti način.

Primjer - kontrolabilnost sistema

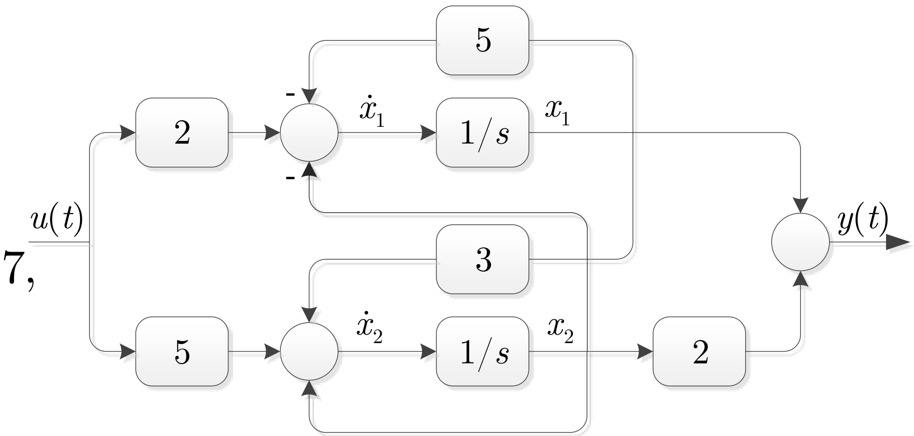
Ispitati kontrolabilnost sistema zadatog u prostoru stanja matricama:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix},\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}.$$

Determinanta matrice kontrolabilnosti je jednaka:

$$\det(\mathbf{M}_c)=\det\left[\mathbf{B}\mid\mathbf{AB}\right]=\det\begin{bmatrix}2 & -15\\ 5 & 11\end{bmatrix}=97,$$

što znači da je sistem potpuno kontrolabilan.



Posmatrajući kvazi-analogni dijagram sa slike uočava se da između stanja x_1, x_2 i ulaza postoji direktna veza, što znači da je sistem kontrolabilan.

Napomena: veza između stanja može biti i indirektna. Odnosno, ulaz može da upravlja stanjem x_2 preko stanja x_1.

```
A=[-5 -1;3 1];
B=[2;5];
Mc=[B A*B]
Mc =
      2    -15
      5     11
det(Mc)
```

Opservabilnost kontinualnih sistema

Neka je LTI sistem u prostoru stanja zadat jednačinama:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

Definicija

Za LTI sistem kažemo da je potpuno opservabilan (osmotriv) ukoliko je na osnovu mjerenja izlaznog vektora $\boldsymbol{y}(t)$ *u nekom konačnom intervalu* t_1-t_0 *moguće rekonstruisati vektor početnih stanja* $\boldsymbol{x}_0$.

Neka je $\mathbf{M}_o$ matrica opservabilnosti koja se formira na sljedeći način:

$$\mathbf{M}_o = \left[\mathbf{C}^T \,|\, \mathbf{A}^T \mathrm{C}^T \,|\ldots|\, \mathbf{A}^{T^{n-1}} \mathbf{C}^T \right].$$

Može se pokazati da je sistem poptuno opservabilan ukoliko važi:

$$rank(\mathbf{M}_o) = \mathrm{rank}(\mathbf{M}_o^T) = \mathrm{rank}\left[\mathbf{C}^T \,|\, \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \,|\ldots|\, \mathbf{A}^{T^{N-1}} \mathbf{C}^T \right] = n \quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{M}_o) \neq 0.$$

Ako je $rank(\mathbf{M}_o) = n - p$ onda sistem ima n-p opservabilnih stanja. Preostalih p stanja nije opservabilno, što znači ona nemaju direktnu ili indirektnu vezu sa izlazom ili su ona linearna kombinacija preostalih n-p opservabilnih stanja.

Opservabilnost diskretnih sistema

Neka je LTI sistem u prostoru stanja zadat jednačinama:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\mathbf{u}(n).$$

Definicija

Za diskretni LTI sistem kažemo da je potpuno opservabilan (osmotriv) ukoliko je na osnovu mjerenja izlaznog vektora $\boldsymbol{y}(n)$ u nekom konačnom intervalu n_1-n_0 moguće rekonstruisati vektor početnih stanja $\boldsymbol{x}_0$.

Radi jednostavnosti, a pritom ne gubeći na opštosti, smatrajmo da je ulazni signal jednak nuli. Posmatrajmo izlaze sistem u prvih n trenutaka:

$$y(0) = \mathbf{C}\mathbf{x}(0) = \mathbf{C}\mathbf{x}_0,$$
$$y(1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(1) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}_0,$$
$$\ldots$$
$$y(n-1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) = \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}_0.$$

Opservabilnost diskretnih sistema

Prethodne jednačine možemo zapisati u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 .$$

Da bi na osnovu n mjerenja signala $y(n)$ mogli rekonstruisati vektor početnih stanja $\mathbf{x}_0$, matrica $\mathbf{M}_\mathrm{o}$ mora biti invertabilna:

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T & \cdots & \mathbf{A}^{T^{n-1}}\mathbf{C}^T \end{bmatrix}^T .$$

Drugim riječima, diskretni sistem je opservabilan ukoliko je $\mathrm{rank}(\mathbf{M}_\mathrm{o}) = n$ ili $\det(\mathbf{M}_\mathrm{o}) \neq 0$.

Stabilizabilnost i detektabilnost sistema

Definicija

Neka je kontinualni/diskretni sistem zadat matricama $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ *i neka je broj kontrolabilnih stanja jednak k, odnosno:*

$$rank(\boldsymbol{M}_c) = rank\left[\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{AB} \mid \dots \mid \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\right] = k.$$

Za kontinualni/diskretni sistem kažemo da je stabilizabilan ukoliko je preostalih n-k nekontrolabilnih stanja sistema stabilno.

Definicija

Neka je kontinualni/diskretni sistem zadat matricama $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ *i neka je broj opservabilnih stanja jednak k, odnosno:*

$$rank(\boldsymbol{M}_o) = rank\left[\boldsymbol{C}^T \mid \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}^T \mid \dots \mid \boldsymbol{A}^{T^{n-1}}\boldsymbol{C}^T\right] = k.$$

Za kontinualni/diskretni sistem kažemo da je detektabilan ukoliko je preostalih n-k neopservabilnih stanja sistema stabilno.

Primjer - opservabilnost

Ispitati opservabilnost kontinualnog sistema zadatog u prostoru stanja matricama:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Da li je sistem detektabilan?

Kanonične forme

Kanonične forme u prostoru stanja

Postoji beskonačan broj „realizacija“ sistema u prostoru stanja, jer postoji beskonačan broj različitih prostora. Sa druge strane, svaka realizacija sistema u prostoru stanja se preslikava u jednu istu funkciju prenosa.

Prostor stanja predstavlja n-dimenzionalni koordinatni sistem, te se različite realizacije mogu dobiti primjenom različitih linearnih transformacija, tj. Odgovarajućim smjenama i prelaskom u drugi koordinatni sistem.

Sve realizacije su ekvivalentne u matematičkom smislu. Međutim, postoji nekoliko stanadardnih načina zapisivanja jednačina stanja, koje nazivamo kanonične realizacije ili kanonične forme u prostoru stanja.

Jedna reprezentacija može imati prednosti u odnosu na druge. Na primjer, za potrebe analize, promjenljive stanja nekad treba odabrati tako da imaju fizički smisao, a nekad za potrebe sinteze regulatora sistem treba predstaviti u nekoj od kanoničnih formi.

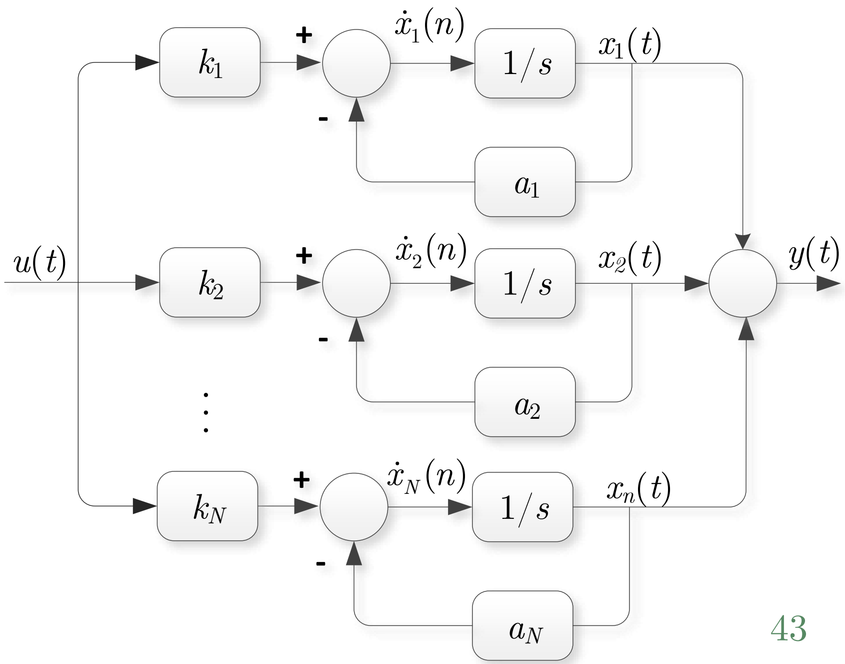
Dijagonalna kanonična forma

Paralelno programiranje je postupak za određivanje modela u prostoru stanja sistema opisanih funkcijama prenosa koje imaju proste i realne polove:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{(s+a_1)(s+a_2)\ldots(s+a_n)} = \sum_{i=1}^{N}\frac{k_i}{s+a_i}, m < n \text{ i } a_n = 1$$

$$G(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0}{(z+a_1)(z+a_2)\ldots(z+a_n)} = \sum_{i=1}^{N}\frac{k_i}{z+a_i}, m < n \text{ i } a_n = 1$$

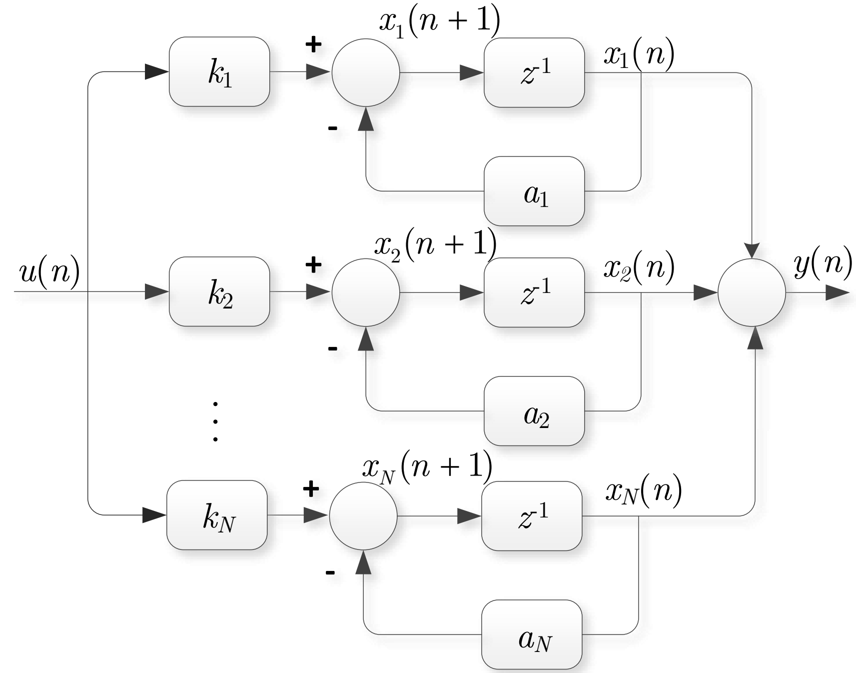
Simulacioni blok dijagram kont. sistema je prikazan na slici desno, dok je diskretna verzija data na sljedećem slajdu. Za promjenljive stanja se usvajaju izlazi iz integratora/kola za kašnjenje. Model sistema u prostoru stanja se dobija očitavanjem jednačina sa simulacionog blok dijagrama.



Dijagonalna kanonična forma

Nakon ispisivanja jednačina za svaki integrator/kolo kašnjenja, formira se model u prostoru stanju u matričnom obliku:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & -a_i & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -a_{N-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_N \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \dots \\ k_{N-1} \\ k_N \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}u(n)$$

Dijagonalna kanonična forma

Matrica **A** je dijagonalna, pri čemu su njeni elementi jednaki polovima sistema.

Dijagonalna kanonična forma

Model u prostoru stanja predstavljen na prethodni način se zove dijagonalna kanonična forma, jer je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna. Još jedan naziv za ovaj oblik je modalna forma, jer su dijagonalni elementi matrice $\mathbf{A}$ jednaki polovima sistema, koji se nekad zovu i modovima.

Korisna osobina dijagonalne kanonične forme ja što se za nju računanje fundamentalne matrice pojednostavljuje:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a_n \end{bmatrix} \longrightarrow e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-a_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-a_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{-a_n t} \end{bmatrix}$$

Na ovaj način se značajno pojednostavljuje računanje odziva na početne uslove. Mana ovog pristupa je što promjenljive stanja u kanoničnom prostoru često nemaju fizički smisao, pa se odgovarajućim transformacijama treba vratiti u fizički prostor stanja.

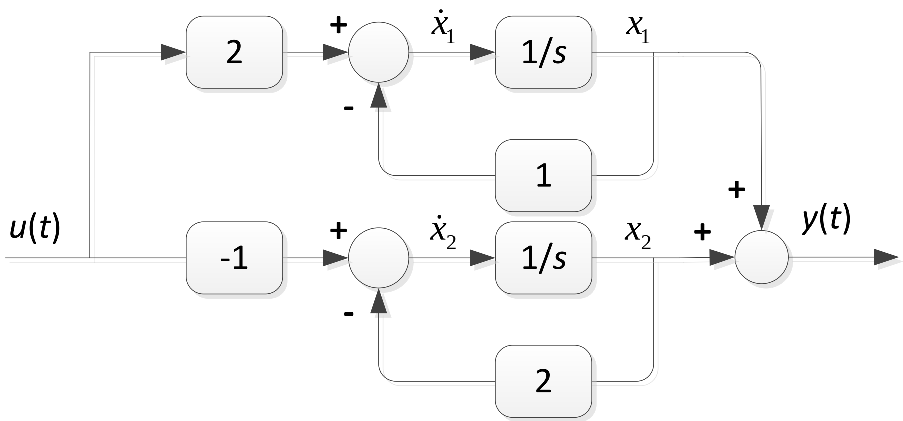
Primjer - DKF

Fundamentalna matrica i odziv na početne uslove su jednaki:

Sistem je zadat funkcijom prenosa:

$$G(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

Odrediti model u prostoru stanja u obliku Jordanove kanonične forme.



$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}(t)=e^{\mathbf{A}t}=e^{\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}t}=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix} \quad \mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1(0)e^{-t}\\ x_2(0)e^{-2t}\end{bmatrix}$$

Jordanova kanonična forma

Sistem je moguće predstaviti u dijagonalnoj formi jedino ako su sopstvene vrijednosti proste i realne. Ako funkcija prenosa ima višestruke polove, onda se ona u prostoru stanja može zapisati u blok-dijagonalnoj ili Jordanovoj kanoničnoj formi.

Neka je funkcija prenosa data kao proizvod elementarnih funkcija prenosa:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{(s+a_1)^3 (s+a_2)\ldots(s+a_N)},$$

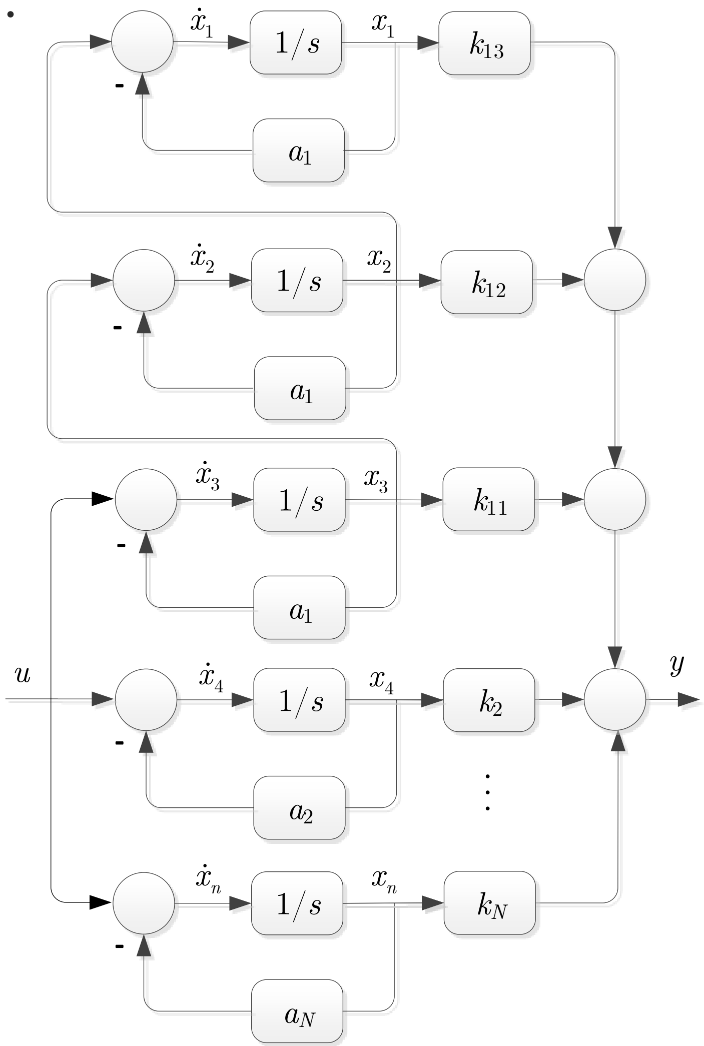
$$= \frac{k_{11}}{s+a_1} + \frac{k_{12}}{(s+a_1)^2} + \frac{k_{13}}{(s+a_1)^3} + \sum_{i=2}^{N} \frac{k_i}{s+a_i}, m < n$$

$$G(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0}{(z+a_1)^3 (z+a_2)\ldots(z+a_N)},$$

$$= \frac{k_{11}}{z+a_1} + \frac{k_{12}}{(z+a_1)^2} + \frac{k_{13}}{(z+a_1)^3} + \sum_{i=2}^{N} \frac{k_i}{z+a_i}, m < n$$

Na gubeći na opštosti, pretpostavili smo da je prvi pol sistema trostruk.

Jordanova kanonična forma



$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & -a_1 & 1 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & -a_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -a_2 & & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & -a_N \end{array}\right], \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} k_{13} & k_{12} & k_{11} & \cdots & k_N \end{bmatrix}$$

Jordanova kanonična forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}u(n)$$

Jordanova kanonična forma

Model u prostoru stanja predstavljen na prethodni način se zove blok-dijagonalna kanonična ili Jordanova kanonična forma, jer matrica **J** ima strukturu Jordanove matrice. Fundamentalna matrica i u ovom slučaju se jednostavnije računa:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -a_n \end{bmatrix} \longrightarrow e^{\mathbf{J}t} = \begin{bmatrix} e^{-a_1 t} & te^{-a_1 t} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{n-1!} e^{-a_1 t} \\ 0 & e^{-a_2 t} & te^{-a_1 t} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{-a_n t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{0} & -a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & 0 & -a_n \end{bmatrix} \longrightarrow e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{J}t} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{0} & e^{-a_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & 0 & e^{-a_n t} \end{bmatrix}$$

Kontrolabilna kanonična forma

Ako su funckije prenosa zadate u opštem obliku, tada se one mogu predstaviti u kontrolabilnoj kanoničnoj formi:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}, m < n \text{ i } a_n = 1,$$

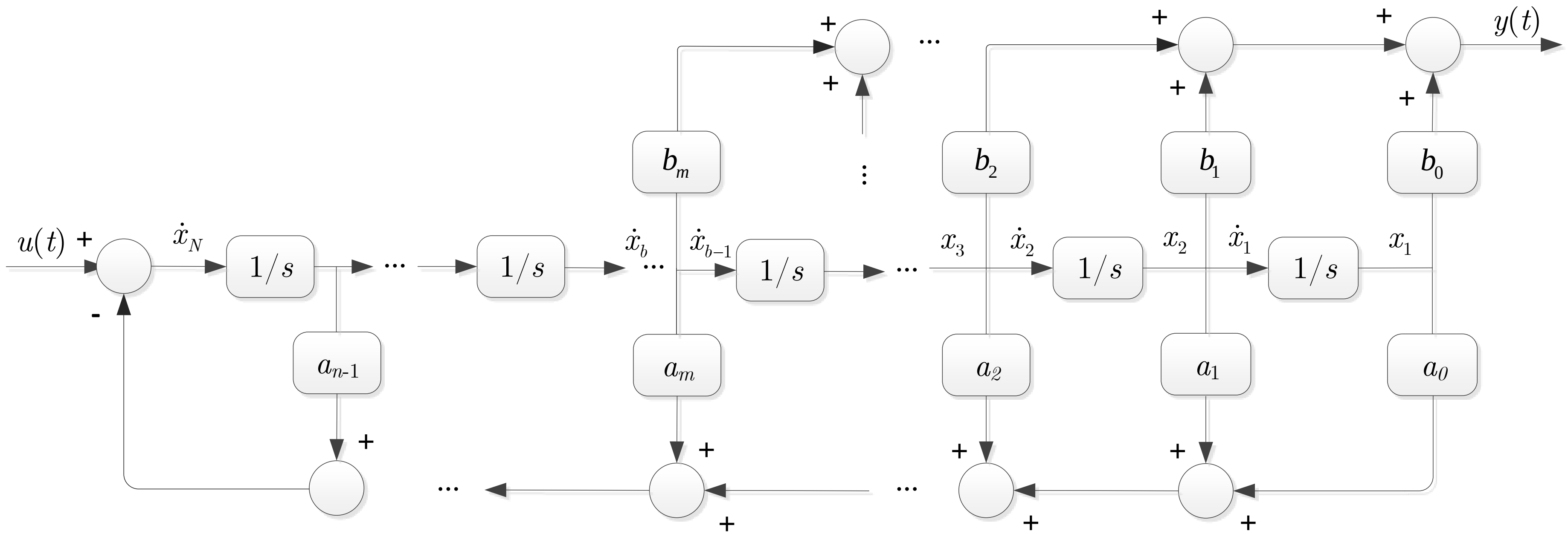
$$G(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}, m < n \text{ i } a_n = 1,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{n\times n}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n\times 1}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_m & \mathbf{0}_{n-m-1} \end{bmatrix}_{1\times n}.$$

Samo kontrolabilni sistemi mogu da se zapišu u ovom kanoničnom obliku. Kontrolabilna kanonična forma je pogodna za dizajn kontrolera, direktno u vremenskom domenu.

Kontrolabilna kanonična forma

Simulacioni blok dijagram koji odgovara kontrolabilnoj kanoničnoj formi kontinualnog sistema je prikazan na slici ispod. Simulacioni blok dijagram diskretnog sistema je skoro identičan. Jedina razlika je u tome što se integratori zamjenjuju kolima za kašnjenje.



Ako su brojilac i imenilac funkcije prenosa istog reda, tada ih treba podijeliti. Koeficijent koji se dobije pri dijeljenju predstavlja matricu **D**, a od ostatka se formiraju matrice **A**, **B** i **C**, na neki od prethodno opisanih načina.

Primjer - KKF

Kontinualni sistem je zadat funkcijom prenosa:

$$G(s) = \frac{2s+6}{2s^2+6s+6}.$$

Predstaviti sistem u prostoru stanja u obliku kontrolabilne kanonične forme. Nakon toga, predstaviti i ZOH ekvivalent kontinualnog sistema u KKF. Usvojiti period odabiranja od 1s.

$$G(s) = \frac{2s+6}{2s^2+6s+6} = \frac{s+3}{s^2+3s+3}.$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,\ y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Kako pronaći kontrolabilnu kanoničnu formu diskretizovanog sistema? Da li će direktna primjena formula za diskretizaciju sačuvati strukturu matrica **A** i **B**?

Opservabilna kanonična forma

Opservabilna kanonična forma je druga kanonična reprezentacija kontinualnih i diskretnih sistema, zadatih u opštem obliku:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}, m < n \text{ i } a_n = 1,$$

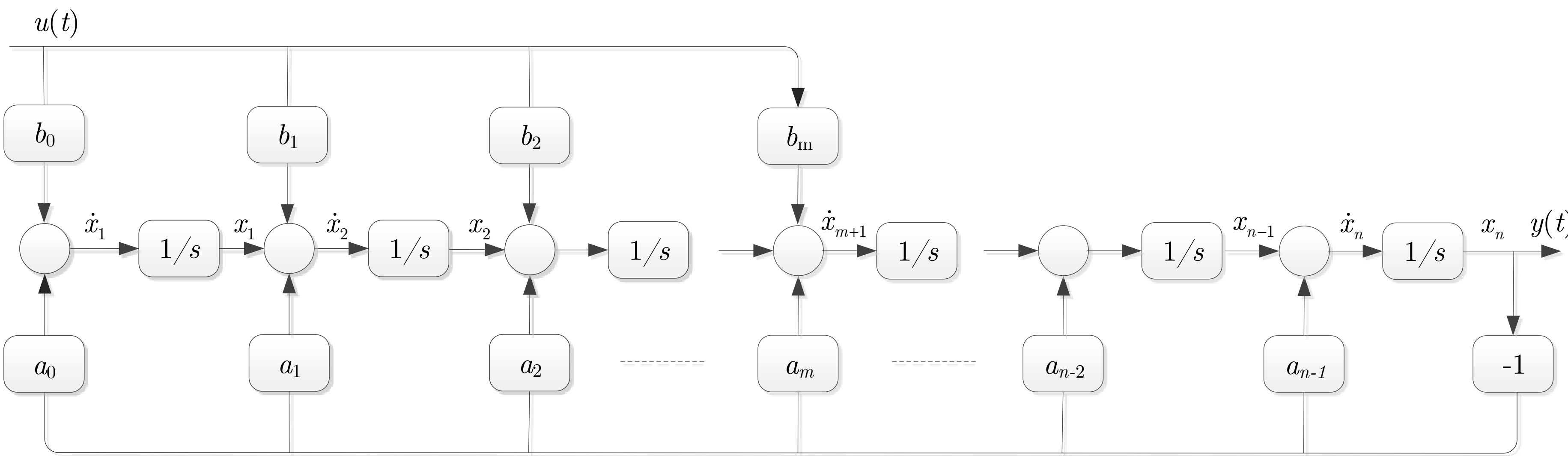
$$G(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}, m < n \text{ i } a_n = 1,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \ldots \\ b_m \\ \mathbf{0}_{n-m-1} \end{bmatrix}_{n \times 1}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1 \times n}.$$

Samo opservabilni sistemi mogu da se zapišu u ovom kanoničnom obliku. Opservabilna kanonična forma je pogodna za dizajn opservera, direktno u vremenskom domenu.

Opservabilna kanonična forma

Simulacioni blok dijagram koji odgovara kontrolabilnoj kanoničnoj formi kontinualnog sistema je prikazan na slici ispod. Simulacioni blok dijagram diskretnog sistema je skoro identičan. Jedina razlika je u tome što se integratori zamjenjuju kolima za kašnjenje.



Primjetimo da za opservabilnu i kontrolabilnu kanoničnu formu važi sljedeća veza:

$$\mathbf{A}_o = \mathbf{A}_k^T, \mathbf{B}_o = \mathbf{C}_k^T$$

$$\mathbf{C}_o = \mathbf{B}_k^T, \mathbf{D}_0 = \mathbf{D}_k.$$

Primjer - OKF

Sistem je zadat funkcijom prenosa:

$$G(s) = \frac{s^2 + 2}{2s^2 + 6s + 4}$$

Predstaviti sistem u prostoru stanja u obliku opservabilne kanonične forme.

$$G(s) = \frac{s^2 + 2}{2s^2 + 6s + 4} = \frac{\frac{1}{2}(2s^2 + 6s + 4) - 3s}{2s^2 + 6s + 4}$$

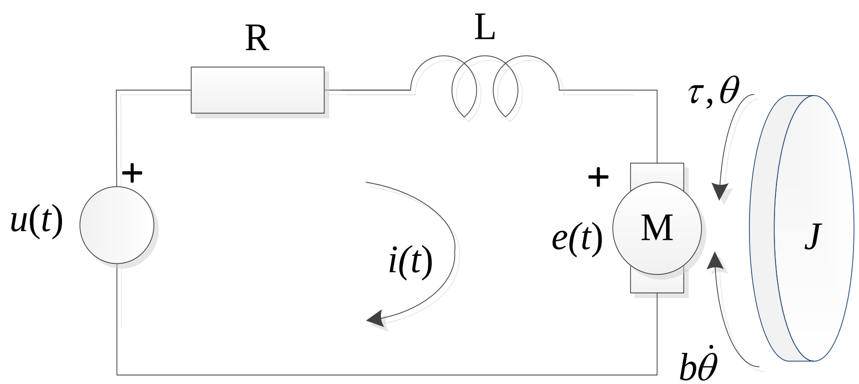
$$= \frac{1}{2} + \frac{-3s}{2s^2 + 6s + 4} = \frac{1}{2} + \frac{-\frac{3}{2}s}{s^2 + 3s + 2}.$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} u.$$

Primjer – DC motor

Na slici ispod je prikazana principijelna šema DC motora. Modelovati dati sistem u prostoru stanja:

a) za promjenljive stanja usvojite fizičke promjenljive
b) u obliku dijagonalne/Jordanove kanonične forme, ukoliko je moguće
c) u obliku kontrolabilne kanonične forme
d) u obliku opservabilne kanonične forme



Linearne transformacije

Linearne transformacije

LTI sistemi imaju beskonačno mnogo realizacija u prostoru stanja. Iz jednog u drugi prostor možemo preći linearnim transformacijama promjenljivih stanja. Posmatrajmo model kontinualnog sistema, pritom imajući u vidu da sve relacije na isti način važe i za diskretne sisteme:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

Neka je $\mathbf{T}$ regularna (nesingularna) matrica dimenzija $n \times n$. U novi koordinatni sistem se prelazi na sljedeći način:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{x}}(t).$$

Nakon smjene koordinata dobija sa sljedeći model:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

Odnosno, u novom prostoru sistem se opisuje sljedećim matricama:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1},\ \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\mathbf{B},\ \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1},\ \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D}.$$

Linearne transformacije

Sada ćemo pokazati da originalni sistem i sistem u transformacionom domenu imaju iste funkcije prenosa. Funkcija prenosa polaznog sistema je:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D},$$

dok je funkcija prenosa u transformacionom domenu:

$$\begin{aligned} G(s) &= \bar{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{D}} \\ &= \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})^{-1}\mathbf{T}\mathbf{B} + \mathbf{D}, \\ &= \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})^{-1}\mathbf{T}\mathbf{B} + \mathbf{D}, \\ &= \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\left(\mathbf{T}(s - \mathbf{A})\mathbf{T}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{T}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{B} + \mathbf{D}, \\ &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \end{aligned}$$

$$\boxed{(\mathbf{ABC})^{-1} \triangleq \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}}$$

Dakle, iako sistem ima više različitih realizacija u prostoru stanja, on se u s-domenu opisuje jednom funkcijom prenosa.

Transformacija u DKF

Prije nego što pokažemo kako se sistem transformiše u dijagonalnu kanoničnu formu, uvešćemo par matematičkih pojmova. Neka je **A** kvadratna matrica dimenzija $n \times n$. Sopstvenim vektorom nazivamo nenulti vektor **x** koji odgovara sopstvenoj vrijednosti λ, pri čemu važi:

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \lambda\mathbf{q}.$$

1. Slične matrice imaju iste sopstvene vrijednosti. Matrice **A** i $\bar{\mathbf{A}}$ su slične po definiciji ukoliko važi $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$.
2. Skalar λ predstavlja sopstvenu vrijednost matrice A ako i samo ako važi $\det(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})=0$. Jednačinu $\det(\lambda\mathbf{I}-\boldsymbol{A})=0$ zovemo karakterističnom jednačinom.
3. Matrica **A** ima n sopstvenih vrijednosti koji u stvari predstavljaju korijene karakteristične jednačine.
4. Sopstveni vektori $\mathbf{q}_i$ koji odgovaraju **različitim** sopstvenim vrijednostima λ_i su linearno nezavisni:

$$\mathbf{A}\mathbf{q}_i = \lambda_i\mathbf{q}_i.$$

Transformacija u DKF

Na osnovu definicije 4. možemo zapisati sljedeće:

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{AQ} = \mathbf{Q\Lambda} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{Q\Lambda Q}^{-1} \Rightarrow \mathbf{\Lambda} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}.$$

Dakle, matrica $\mathbf{Q}$ predstavlja skup sopstvenih vektora koji odgovaraju različitim sopstvenim vrijednostima, dok je matrica $\mathbf{\Lambda}$ dijagonalna matrica sopstvenih vrijednosti. Na osnovu prethodnih jednačina može se uočiti da se kvadratna matrica $\mathbf{A}$ može dijagonlizovati na sljedeći način:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q\Lambda Q}^{-1} \Rightarrow \mathbf{\Lambda} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}.$$

Odnosno, model sistema zadat u opštem obliku se može transformisati u dijagonalnu formu korišćenjem linearnog preslikavanja:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}.$$

Transformacija u DKF

Važno je napomenuti da sopstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ u stvari predstavljaju polove sistema u s ili z ravni. Sopstvene vrijednosti mogu biti kompleksne i tada se javljaju u vidu konjugovano kompleksnih parova. Ukoliko matrica $\mathbf{A}$ ima dvije ili više jednakih sopstvenih vrijednosti, tada nema garancija da se ona može dijagonalizovati. Matrica $\mathbf{A}$ se može dijagonalizovati jedino u slučaju kada sopstvenoj vrijednosti koja je n-tostruka odgovara n linearno nezavisnih vekora $\mathbf{q}_i$. U svakom slučaju matrice sa višestrukim sopstvenim vrijednostim se uvijek mogu transformisati u Jordanovu kanoničnu formu.

Primjer – transformacija u DKF

Kontinualni sistem je zadat u prostoru stanja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Transformisati dati sistem u dijagonalnu kanoničnu formu.

Sopstveni vektori i sopstvene vrijednosti se mogu izračunati na osnovu jednačina izloženih na prethodnim slajdovima, međutim radi jednostavnosti koristićemo ugrađenu Matlab-ovu funkciju `eig`, kojom se dobija:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -0.7071 & 0.0788 \\ 0 & 0.7071 & -0.3152 \\ 0 & 0 & 0.9457 \end{bmatrix}, \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

```
>> [Q L]=eig(A)
```

Sistem se preliskava u dijagonalnu kanonočnu formu na sljedeći način:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda},\ \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B},\ \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{Q},\ \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D}.$$

Transformacija u KKF

Neka je kontinualni sistem zadat u prostoru stanja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

Naš zadatak je da odredimo transformacionu matricu $\mathbf{T}_c$ koja će zadati sistem transformisati u kontrolabilnu kanoničnu formu:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}_c\mathbf{x}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{T}_c^{-1}\bar{\mathbf{x}}(t).$$

Može se pokazati da za dvije reprezentacije u prostoru stanja čije su promjenljive vezane linearnim operatorom $\mathbf{T}$ važi:

$$\bar{\mathbf{M}}_c = \mathbf{T}_c\mathbf{M}_c,$$

gdje su $\overline{\mathbf{M}}_c$ i $\mathbf{M}_c$ matrice kontrolabilnosti pomenuta dva sistema. Dakle, ako želimo da pređemo u kontrolabilni kanonični prostor, tada treba usvojiti sljedeću transfomacionu matricu:

$$\mathbf{T}_c = \bar{\mathbf{M}}_c\mathbf{M}_c^{-1},$$

gdje je $\mathbf{M}_c$ matrica kontrolabilnosti polaznog sistema, a $\overline{\mathbf{M}}_c$ matrica kontrolabilnosti u kanoničnom koordinatnom sistemu.

Transformacija u KKF

Matrice kontrolabilnosti početnog sistema se računa na osnovu zadatih matrica $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix},$$

dok se matrica računa po istoj formuli, s tim što umjesto $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ u prethodnom izrazu figurišu matrice $\bar{\mathbf{A}}$ i $\bar{\mathbf{B}}$, a one se dobijaju na osnovu funkcije prenosa sistema.

Inverzna transformacija je jednaka:

$$\mathbf{T}_c^{-1} = \mathbf{M}_c \bar{\mathbf{M}}_c^{-1},$$

pri čemu se može pokazati da inverzna matrica kontrolabilnosti u kontrolabilnom kanoničnom prostoru uvijek ima sljedeći oblik:

$$\bar{\mathbf{M}}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -a_0 \\ \cdots & \cdots & \iddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & -a_0 & \cdots & \cdots \\ 1 & -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Primjer - transformacija u KKF

Kontinualni sistem je zadat u prostoru stanja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odrediti ZOH ekvivalent sistema, a zatim odrediti transformacionu matricu kojom se ZOH ekvivalent preslikava u kontrolabilnu kanoničnu formu. Perioda odabiranja je 0.1s.

Nakon primjene formula za ZOH diskretizaciju dobijaju se sljedeće matrice:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0.0952 & 0.0042 \\ 0 & 0.9048 & 0.0782 \\ 0 & 0 & 0.6703 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0.0042 \\ 0.0824 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da bi prešli u kontrolabilni kanonični prostor, treba prvo odrediti matricu linearnog preslikavanja:

$$\mathbf{T}_c = \bar{\mathbf{M}}_c \mathbf{M}_c^{-1}.$$

Primjer - transformacija u KKF

Matrica $\mathbf{M}_c$ predstavlja matricu kontrolabilnosti početnog sistema:

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d & \mathbf{A}_d\mathbf{B}_d & \mathbf{A}_d^2\mathbf{B}_d \end{bmatrix},$$

dok se matrica $\overline{\mathbf{M}}_c$ se određuje na osnovu iste formule, pri čemu diskretni sistem prvo treba predstaviti u kontrolbilnoj formi. Sa tim ciljem prvo ćemo odrediti karakteristični polinom diskretnog sistema:

$$f(z) = \det\left(zI - A_d\right) = z^3 - 2.5752z^2 + 2.1817z - 0.6065.$$

Na osnovu karakterističnog polinoma se fomiraju matrice $\overline{\mathbf{A}}_d$ i $\overline{\mathbf{B}}_d$ u kontrolabilnom prostoru stanja, a zatim se računa matrica kontrolabilnosti:

$$\overline{\mathbf{A}}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.6065 & -2.1817 & 2.5752 \end{bmatrix}, \overline{\mathbf{B}}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{M}}_c = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_d & \overline{\mathbf{A}}_d\overline{\mathbf{B}}_d & \overline{\mathbf{A}}_d^2\overline{\mathbf{B}}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2.5750 \\ 1 & 2.5750 & 4.4486 \end{bmatrix}.$$

Primjer - transformacija u KKF

Konačno, matrica transformacije **T** ima seljedeći oblik:

$$\mathbf{T}_c = \bar{\mathbf{M}}_c \mathbf{M}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1275 & -137.61 & 4.8104 \\ 1275 & -3.1837 & -2.1172 \\ 1275 & 118.45 & 3.7474 \end{bmatrix}.$$

Dobijeni rezultat se može verifikovati na sljedeći način:

$$\bar{\mathbf{A}}_d = \mathbf{T}_c \mathbf{A}_d \mathbf{T}_c^{-1},\ \bar{\mathbf{B}}_d = \mathbf{T}_c \mathbf{B}_d,$$
$$\bar{\mathbf{C}}_d = \mathbf{C}_d \mathbf{T}_c^{-1},\ \bar{\mathbf{D}}_d = \mathbf{D}_d.$$

Kao rezultat prethodnih formula dobiće se model sistema u kontrolabilnom kanoničnom prostoru. Matrice $\bar{\mathbf{A}}_d$ i $\bar{\mathbf{B}}_d$ smo svakako već odredili, dok je matrica $\bar{\mathbf{C}}_d$ jednaka:

$$\bar{\mathbf{C}}_d = \begin{bmatrix} 0.071 & -0.157 & 0.086 \end{bmatrix}.$$

```
>> A=[0 1 0;0 -1 1;0 0 -4];
>> B=[0;0;1];
>> C=[1 1 1];
>> syms t
>> Ad=expm(A*0.1)
>> Bd=eval(int(expm(A*t)*B,0,0.1))
>> Mc=[Bd Ad*Bd Ad^2*Bd]
>> syms z
>> f=vpa(collect(det((z*eye(3)- Ad))),5)
% vpa - zaokruzivanje brojeva
>> coeff=coeffs(f)
>> Ad1=[0 1 0;0 0 1;-coeff(1:end-1)]
>> Bd1=[0 0 1]';
>> Mc_=[Bd1 Ad1*Bd1 Ad1^2*Bd1]
>> format short g
>> Tc=eval(Mc_*inv(Mc))
```

Transformacija u OKF

Sistem se na sličan način transformiše u opservabilnu kanoničnu formu. Linearni operator kojim se vrši traženo preslikavanje se računa na sljedeći način:

$$\mathbf{T}_o = \bar{\mathbf{M}}_o \mathbf{M}_o^{-1},$$

gdje $\mathbf{M}_o$ predstavlja matricu opservabilnosti polaznog sistema, a $\overline{\mathbf{M}}_o$ matricu opservabilnosti sistema u opservabilnom kanoničnom prostoru.

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T & \cdots & \mathbf{A}^{T^{n-1}}\mathbf{C}^T \end{bmatrix}^T.$$

$$\bar{\mathbf{M}}_o = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}^T & \bar{\mathbf{A}}^T\bar{\mathbf{C}}^T & \cdots & \bar{\mathbf{A}}^{T^{n-1}}\bar{\mathbf{C}}^T \end{bmatrix}^T.$$

Linearizacija dinamičkih sistema

Linearizacija dinamičkih sistema

Veliki broj fizičkih sistema ima nelinearnu prirodu. Da bi se iskoristile prednosti koje pruža linearna teorija, nelinearni modeli se mogu linearizovati razvijanjem nelinearne jednačine u Tejlorov red, u okolini radne tačke x_s, i skraćivanjem Tejlorovog razvoja na prva dva člana.

$$f(x) = f(x_s) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_s} (x - x_s) + stariji\ \ \check{c}lanovi$$

Kod dinamičkih sistema (onih koji se matematički opisuju diferencijalnim jednačinama) linearizacija se najčešće vrši u okolini stacionarne tačke, ravnotežne tačke ili ekvilibrijuma, koja se dobija izjednačavanjem izvoda sa nulom (izvod od konstante je jednak nuli). U praksi, veliki broj dinamičkih sistema se može aproksimirati linearnim diferencijalnim jednačinama u okolini radnog opsega od interesa. Na primjer, DC motor je linearan na nekom radnom opsegu napona. Za velike vrijednosti napona brzina motora ulazi u zasićenje, dok se za male vrijednosti napona motor uopšte ne rotira.

Na slici je ilustrovan primjer linearizacije „obične“ funkcije $f(t)=\sqrt{t}+2$. Ako usvojimo $t_s=4$ kako radnu tačku, tada se funkcija $f(t)$ može razviti u Tejlorov red na sljedeći način:

$$\hat{f}(t)=f(t_s)+f'(t)\big|_{t=t_s}(t-t_s)=4+\frac{1}{2\sqrt{t_s}}(t-4)=4+0.25(t-4).$$

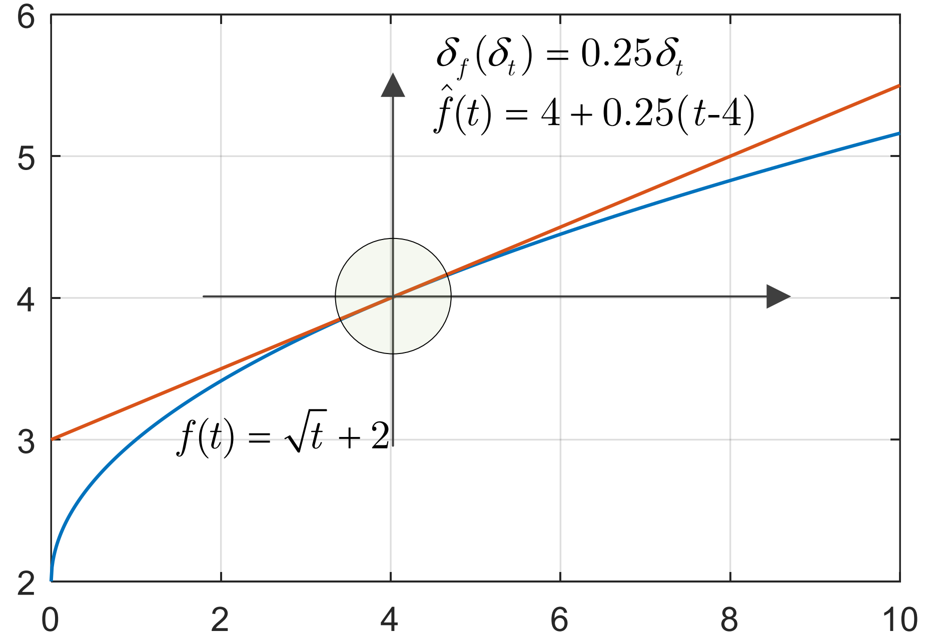
Dodatno, možemo uvesti smjene koordinata:

$$\delta(t)=t-4 \quad \text{i} \quad \delta_f(\delta(t))=\hat{f}(t)-4,$$

i zapisati linearizovanu funkciju na sljedeći način:

$$\delta_f(\delta(t))=0.25\delta(t).$$

U suštini, linearizovana funkcija predstavlja tangentu u radnoj tački, pri čemu njeno odstupanje od vrijednosti funkcije $f(t)$ raste sa porastom $\delta(t)$.



Linearizacija dinamičkih sistema

Posmatrajmo sada dinamički sistem opisan sljedećom nelinearnom diferencijalnom jednačinom prvog reda:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), x(0^-) = x_p.$$

Pretpostavimo da je ulaz u konstantan i jednak u_s, i da promjenljiva stanja x u stacionarnom stanju ima konstantu vrijednost x_s. Funkcija $f(x(t), u(t))$ se u okolini stacionarne tačke (x_s, u_s) može razviti u Tejlorov red:

$$f(x(t), u(t)) = \cancelto{0}{f(x_s, u)} + \left.\frac{df(x,u)}{dx}\right|_{x_s} (x - x_s) + \left.\frac{df(x,u)}{du}\right|_{u_s} (u - u_s) + stariji\ \check{c}lanovi$$

S obzirom da par (x_s, u_s) predstavlja stacionarnu tačku, to znači da važi:

$$\dot{x} = f(x_s, u_s) = 0,$$

$$\boxed{\frac{d(x - x_s)}{dt} \triangleq \frac{dx}{dt}}$$

pa se prethodna jednačina svodi na:

$$\frac{d(x - x_s)}{dt} \approx \left.\frac{df(x,u)}{dx}\right|_{u_s} (x - x_s) + \left.\frac{df(x,u)}{du}\right|_{u_s} (u - u_s).$$

Linearizacija dinamičkih sistema

Da bi dobili linearni model, u prethodnom izrazu treba uvesti smjene:

$$\delta_x = x - x_s, \delta_u = u - u_s,$$

gdje δ_x i δ_u predstavljaju odstupanje promjenljive stanja i ulaza od njihovih stacionarnih vrijednosti. Konačno, linearizovani model ima oblik:

$$\dot{\delta}_x \approx a\delta_x + b\delta_u, \delta_x(0^-) = x_p - x_s,$$

gdje su a i b vrijednosti odgovarajućih parcijalnih izvoda u tačkama x_s i u_s:

$$a = \left.\frac{\partial f(x,u)}{dx}\right|_{x_s}, b = \left.\frac{\partial f(x,u)}{du}\right|_{u_s}.$$

Na sličan način se linearizuje izlazna jednačina:

$$y = g(x,u) \approx \overset{y_s}{g(x_s,u_s)} + \left.\frac{\partial g(x)}{dx}\right|_{x_s}(x - x_s) + \left.\frac{\partial g(x,u)}{du}\right|_{u_s}(u - u_s),$$

$$y - y_s = \left.\frac{\partial f(x,u)}{dx}\right|_{u_s}(x - x_s) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{du}\right|_{u_s}(x - u_s),$$

$$\delta_y = c\delta_x + d\delta_u.$$

$$\boxed{\begin{gathered}\delta_y = y - y_s \\ c = \left.\frac{\partial g(x,u)}{dx}\right|_{x_s} \\ d = \left.\frac{\partial g(x,u)}{du}\right|_{u_s}\end{gathered}}$$

Linearizacija dinamičkih sistema

U opštem slučaju, model u prostoru stanja nelinearnog sistema ima oblik:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \mathbf{x}(0^-) = \mathbf{x}_p,$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)).$$

Neka je $\boldsymbol{x}_s$ i $\mathbf{u}_s$ set stacionarnih tačaka koje zadovoljavaju gornji sistem diferencijalnih jednačina, i neka je $\mathbf{y}_s$ vektor izlaza u stacionarnom stanju:

$$\dot{\mathbf{x}}_s(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_s(t), \mathbf{u}_s(t)) = 0,$$
$$\mathbf{y}_s(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_s(t), \mathbf{u}_s(t)).$$

Multivarijabilne funkcije se na sličan način razvijaju u Tejlorov red:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}} (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_s),$$

$$\mathbf{y}(t) \approx \mathbf{g}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s) + \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s) + \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}} (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_s).$$

Linearizacija dinamičkih sistema

Prethodne jednačine se mogu zapisati na isti način kao za jednodimenzioni slučaj:

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathbf{x}}(t) \approx \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}}(t),$$
$$\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{y}}(t) \approx \mathbf{C}\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}}(t).$$

gdje su $\boldsymbol{\delta}_x$, $\boldsymbol{\delta}_u$ i $\boldsymbol{\delta}_y$ vektori odstupanja od odgovarajućih stacionarnih tačaka. Matrice **A**, **B**, **C** i **D** su Jakobijeve matrice, odnosno matrice parcijalnih izvoda:

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}}, \quad \mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}},$$
$$\mathbf{C} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}}, \quad \mathbf{D} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s\\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_s}}.$$

Primjer 1

Kontinualni sistem je opisan diferencijalnom jednačinom:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = -\sqrt{x(t)} + \frac{u^2(t)}{3}, \;\; x(0^-) = 0.5.$$

Linearizovati model pod pretpostavkom da ulazni signal varira u okolini vrijednosti u=2.

Najprije treba odrediti stacionarnu tačku sistema (iz uslova da je prvi izvod jednak nuli):

$$u_s = 2 \;\Rightarrow\; 0 = -\sqrt{x_s} + \frac{2^2}{3} \;\Rightarrow\; x_s = \frac{16}{9} \;\Rightarrow\; \boxed{u_s = 2, x_s = \frac{16}{9}}$$

Linearizovani model sistem ima sljedeći oblik:

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_x(t) \approx \mathbf{A}\boldsymbol{\delta}_x(t) + \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}_u(t),$$
$$\boldsymbol{\delta}_y(t) \approx \mathbf{C}\boldsymbol{\delta}_x(t) + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}_u(t),$$

odnosno:

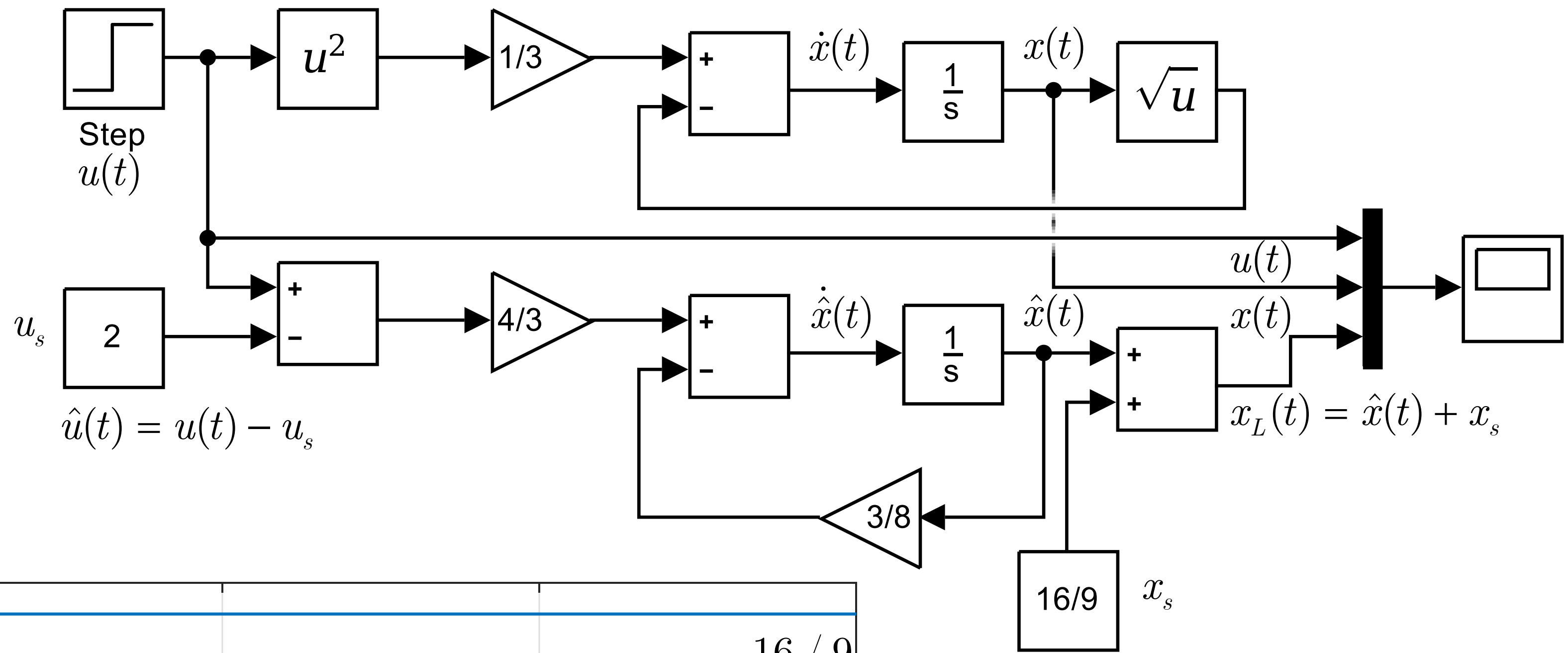
$$\boxed{\dot{\delta}_x = -\frac{3}{8}\delta_x + \frac{4}{3}\delta_u.}$$

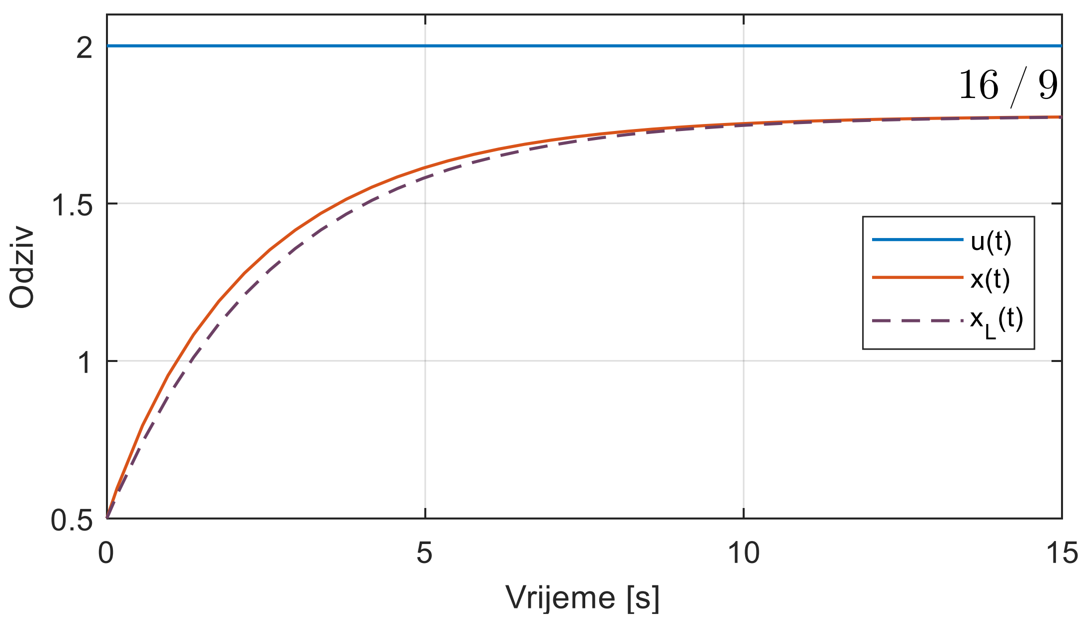
Matrice **A** i **B** su po definciji:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_s, u=u_s} = -\frac{1}{2\sqrt{x_s}} = -\frac{3}{8},$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{x=x_s, u=u_s} = \frac{2}{3}u_s = \frac{4}{3}.$$

Primjer 1

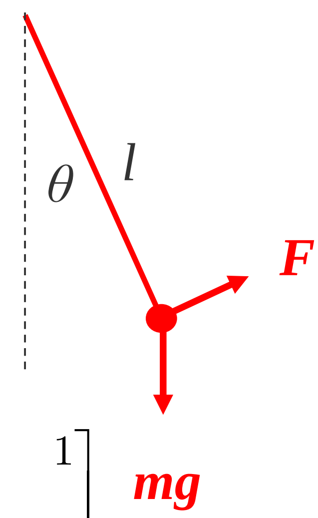




Na slici je prikazana simulaciona šema diferencijalnih jednačina (u Simulink-u). Sa slike lijevo se može uočiti da linearizovani i nelinearni model sistema imaju istu vrijednost odziva u stacionarnom stanju.

Primjer 2

Modelovati klatno prikazano na slici, a zatim linearizovati dobijeni model u okolini stacionarne tačke. Smatrati da je $F = 0$.



Jednačina rotacije klatna ima sljedeći oblik:

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = Fl - mgl\sin\theta,\;\; J = ml^2.$$

Nakon uvođenja promjenljivih $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$, dobija je model u prostoru stanja:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, F) = x_2$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, F) = -\frac{g}{l}\sin x_1 + \frac{F}{ml},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s, F=F_s} & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s, F=F_s} \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s, F=F_s} & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s, F=F_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_{x_1} \\ \dot{\delta}_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x_1} \\ \delta_{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{bmatrix} \delta_F.$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial F}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s, F=F_s} \\ \left.\frac{\partial f_1}{\partial F}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s, F=F_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{bmatrix}$$

Stacionarne tačke (ravnotežno stanje) su $x_{1s}=x_{2s}=F_s=0$. One su mogu dobiti iz jednačina, mada jasno je da će u ravnotežnom stanju ugao i brzina klatna da budu jednaki nuli.

Stabilnost sistema

Stabilnost sistema

Posmatrajmo kontinualni nelinearni sistem zadat u prostoru stanja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t).$$

Vektor stanja $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_s$ i vektor ulaza $\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}_s$ predstavljaju ekvilibrijumski ili ravnotežni par, ako za početne uslove $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_s$ i konstantni ulaz $\mathbf{u}(t)= \mathbf{u}_s$ stanja sistema ostaju konstantna: $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_s$, $\forall t \geq 0$. Drugim riječima, ako se sistem usljed djelovanja konstatnog ulaza $\mathbf{u}(t)= \mathbf{u}_s$ nađe u tački $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_s$, on će tu i ostati.

Alternativna definicija ekvilibrijuma ili ravnotežnog stanja, koju smo uveli u dijelu u kojem smo objašnjavali linearizaciju, je:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_s(t), \mathbf{u}_s(t)) = \mathbf{0}.$$

Ekvilibrijum može biti stabilan i nestabilan. Ako sistem malo pomjerimo iz ravnotežnog stanja i ako se on nakon toga ne vrati u isto ravnotežno stanje ili njegovu okolinu, onda za ekvilibrijum kažemo da je nestabilan.

Stabilnost sistema

Stabilni ekvilibrijumi se mogu klasifikovati u tri grupe: lokalno stabilne, lokalno asimptotski stabilne i globalne ekvilibrijume.

Ekvilibrijum $\mathbf{x}_s$ je lokalno stabilan ako za bilo koje početne uslove $\mathbf{x}(0)$ koji su „dovoljno blizu“ ekvilibrijuma $\mathbf{x}_s$, trajektorije sistema $\mathbf{x}(t)$ ostaju u okolini $\mathbf{x}_s$, za svako $t \geq 0$.

Analitička definicija: $\exists \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \| \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_s \| < \delta \Rightarrow \| \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s \| < \varepsilon, \; \forall t > 0.$

Ekvilibrijum $\mathbf{x}_s$ je lokalno asimptotski stabilan ako za bilo koje početne uslove $\mathbf{x}(0)$ koji su „dovoljno blizu“ ekvilibrijuma $\mathbf{x}_s$, trajektorije sistema se vraćaju u početno stanje $\mathbf{x}_s$, za svako $t \geq 0$.

Analitička definicija: $\exists \delta > 0 : \| \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_e \| < \delta \Rightarrow \| \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e \| = 0, \; \forall t > 0.$

Ekvilibrijum $\mathbf{x}_s$ je globalno stabilan ako za bilo koje početne uslove $\mathbf{x}(0)$ trajektorije sistema konvergiraju ka početnom stanju $\mathbf{x}_s$, za svako $t \geq 0$.

Analitička definicija: $(\forall \delta > 0) \; \| \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_e \| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \| \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e \| = 0.$

Stabilnost sistema

Posmatrajmo kontinualni linearni sistem zadat u prostoru stanja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

Za $\mathbf{u}(t) = 0$, postoji samo jedno ravnotežno stanje. Koje?

Linearni sistem je stabilan ukoliko je njegov prirodni odziv konvergira ka nuli ($\mathbf{u}(t)=0$):

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0.$$

Uzimajući u obzir da se matrica $\mathbf{A}$ može zapisati na sljedeći način,

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1},$$

dobija se:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}t}\mathbf{x}_0 = \mathbf{Q}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{Q}^{-1}.$$

dokazati

Promjenljive $\mathbf{x}(t)$ će konvergirati ka nuli pod uslovom da elementi matrice $e^{\mathbf{\Lambda}t}$ konvergiraju ka nuli. S obzirom da je $e^{\mathbf{\Lambda}t}$ dijagonalna matrica, to dalje znači da sve sopstvene vrijednosti moraju imati negativan realni dio: $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0, i = 1, \cdots n$.

Stabilnost sistema

Sada posmatrajmo diskretni linearni sistem zadat u prostoru stanja:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\mathbf{u}(n).$$

Prirodni odziv diskretnog sistema je:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0.$$

Uvrštavanjem $\mathbf{A}=\mathbf{Q\Lambda Q}^{-1}$ u izraz za $\mathbf{x}(n)$ dobija se:

$$\mathbf{x}(n) = \underbrace{\mathbf{Q\Lambda Q}^{-1} * \mathbf{Q\Lambda Q}^{-1} * \cdots * \mathbf{Q\Lambda Q}^{-1}}_{n} = \mathbf{Q\Lambda}^n\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}_0.$$

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}(n)\mathbf{Q} = \overline{\mathbf{x}}(n) = \mathbf{\Lambda}^n\mathbf{x}_0.$$

Prethodni set diferencnih jednačina konvergira pod uslovom da je moduo sopstvenih vrijednosti manji od 1 (geometrijska progresija):

$$|\lambda_i| < 1,\ \ i = 1, \cdots n.$$

Stabilnost sistema

Dakle, da bi linearni kontinualni sistem bio stabilan realni dio svih sopstvenih vrijednosti matrice **A** mora biti negativan. Ako bar jedna sopstvena vrijednost ima realni dio jednak nuli, tada je sistem marginalno stabilan (na granici stabilnosti). Na kraju, ako je realni dio bar jedne sopstvene vrijednosti pozitivan, tada je sistem nestabilan. S obzirom da sopstvene vrijednosti predstavljaju polove sistema kontinualnog sistema, ovaj uslov stabilnosti je ekvivalentan uslovu stabilnosti u s-domenu.

Sa druge strane, linearni diskretni sistem će biti stabilan ukoliko je moduo svih sopstvenih vrijednosti matrice **A** mora manji od 1. Ako bar jedna sopstvena vrijednost ima jedinični moduo, tada je sistem marginalno stabilan ili na granici stabilnosti. Na kraju, ako je moduo bar jedne sopstvene vrijednosti veći od 1, tada je sistem nestabilan. Ovaj uslov stabilnosti je ekvivalentan uslovu stabilnosti u z-domenu, koji kaže da je za stabilnost sistema neophodno da polovi sistema leže unutar jediničnog kruga u z-ravni.

Ljapunov indirektni metod

Kako nelinearni sistemi imaju više ekvilibrijuma, jedan način za ispitivanje stabilnosti ekvilibrijuma je primjenom postupka linearizacije sistema. Neka je $\mathbf{x}_s$ ekvilibrijum nelinearnog autonomnog sistema $\mathbf{x}(t)=\mathbf{f}(\mathbf{x})$, i neka je linearizovani model sistema u okolini ekvilibrijuma $\mathbf{x}_s$:

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\delta\mathbf{x}(t),$$

gdje je $\delta\mathbf{x}=\mathbf{x}\text{-}\mathbf{x}_s$. Tada važi sljedeće:

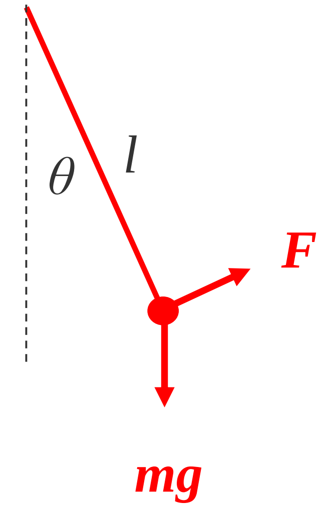
- Ako je $\mathrm{Re}\{\lambda_i\}<0$, $i = 1, \ldots, n$, tada je ekvilibrijum $\mathbf{x}_s$ lokalno stabilan,
- Ako je $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} \leq 0$, $i = 1, \ldots, n$, tada se ništa ne može zaključiti o stabilnosti ekvilibrijuma $\mathbf{x}_s$,
- Ako $\exists i$ takvo da je $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} > 0$ tada je ekvilibrijum $\mathbf{x}_s$ lokalno nestabilan.

Primjer – stabilnost nelinearnog sistema

Klatno prikazano na slici je opisano u prostoru stanja sljedećim jednačinama:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, F) = x_2$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, F) = -\frac{g}{l}\sin x_1 + \frac{F}{ml}.$$



Odreti ekvilibrijume sistema, a zatim ispitati njihovu stabilnost.

Smatrati da je F=0.

Izjednačavanjem prethodnih jednačina dobijaju se dva ravnotežna stanja (x_{s1}, x_{s2}): (0,0) i (0, π).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s, F=F_s} & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s, F=F_s} \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s, F=F_s} & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s, F=F_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos x_{s1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial F}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s, F=F_s} \\ \left.\frac{\partial f_1}{\partial F}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s, F=F_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{bmatrix}$$

Primjer – stabilnost nelinearnog sistema

Uvrštavanjem stacionarnih tačaka u Jakobijeve matrice dobijaju se sljedeća dva linearizovana modela klatna:

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_{x_1} \\ \dot{\delta}_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x_1} \\ \delta_{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{ml} \end{bmatrix} \delta_F,$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_{x_1} \\ \dot{\delta}_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x_1} \\ \delta_{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{ml} \end{bmatrix} \delta_F.$$

Sopstvene vrijednosti prvog modela su $\pm j\sqrt{gl}$, što znači da je je ekvilibrijum (0,0) stabilan. Sopstvene vrijednosti drugog modela su $\pm\sqrt{gl}$, što znači da je ekvilibrijum (0, π) nestabilan. Ekvilibrijum (0, 0) je globalno stabilan, što se može zaključiti na osnovu fizičkog modela klatna.

```
>> A1=[0 1;-g/l 0]
>> eig(A1)
ans =
   (-g)^(1/2)/l^(1/2)
  -(-g)^(1/2)/l^(1/2)
>> A2=[0 1;g/l 0]
>> eig(A2)
ans =
   g^(1/2)/l^(1/2)
  -g^(1/2)/l^(1/2)
```